

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

56e jaargang
1980/1981
no. 1
augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-1 51 05. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 27,—; contributie zonder Euclides *f* 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^II, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-25 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Plannen voor de komende jaargang

Het is al bijna traditie dat de redaktie aan het begin van een nieuwe jaargang zowel een beetje terugkijkt op de jaargang die net voorbij is, als (en vooral) uitkijkt naar de jaargang die met dit nummer begint.
In het voorbije jaar heeft de redaktie er naar gestreefd aspecten van de didaktiek van de wiskunde, die met het dagelijks werk van elke wiskundedocent te maken hebben, in artikeltjes van onze collega's aan de lezers voor te leggen. Er zijn twee bijzondere nummers verschenen: het examennummer en het verslag van de jaarlijkse studiedag van de vereniging.
De komende jaargang zal er ongeveer net zo uitzien. Wij willen proberen nog meer aandacht aan het dagelijks werk van elke wiskundedocent te besteden. Daartoe herhalen we onze oproep:
'In elke les gebeurt wel iets bijzonders, iets waarvan u denkt: het zou aardig zijn als ook andere collega's hiervan kennis nemen, erop reflecteren en eventueel hùn kijk erop aandragen. Graag ontvangen wij korte stukjes waarin op dergelijke voorvallen wordt ingegaan. Misschien weet u van collega's, dat zij aardige oplossingen voor de alledaagse problemen hebben. Maak ons attent op die collega's, dan kunnen wij bijvoorbeeld middels een interview alle lezers van die oplossingen op de hoogte stellen.'
Door bovengenoemde aandachtspunten aan te kondigen hoopt de redaktie te laten zien dat het haar ernst is met het beleid, dat gericht is op het bieden van praktische steun bij het onderwijzen van wiskunde op vele niveaus.
Wij leggen graag het accent op dit soort 'levende didaktiek', ontwikkeld in het klaslokaal. Vanzelfsprekend is er ook belangstelling voor wat meer theoretisch getinte artikelen, die mogelijk het bovenbedoelde in groter kader kunnen plaatsen. Naast de tot nu toe genoemde artikelen mogen ook wat meer wiskundige artikelen niet ontbreken.
Twee bijzondere nummers zullen met zekerheid verschijnen: het traditionele examennummer met alle opgaven van eerste en tweede tijdvak voor het lbo, mavo, havo en vwo. De tweede special is de al eerder aangekondigde uitgebreide beschouwing over de onderbouwdelen van de methode Van A tot Z.
Als de jaarlijkse verenigingsstudiedag zich daartoe leent, zullen wij samen met de organisatoren daarvan eveneens in een special verslag doen.
Tot slot willen wij graag de hoop uitspreken dat de goede samenwerking met de uitgever zich op dezelfde wijze zal voortzetten. Het feit dat alle nummers van de afgelopen jaargang precies op tijd verschenen zijn, is slechts een van de aspecten van onze uitnemende relatie met Wolters-Noordhoff.

de redaktie

Ervaringen met een wiskunde-werkboekje

naar eigen ontwerp en voor eigen gebruik

H. G. HEUSINKVELD

Op veel scholen worden regelmatig stencils gebruikt als aanvulling op de lessen in het boek. Omdat bij ons het aantal stencils zo toenam en ze zo'n centrale plaats gingen innemen, hebben we besloten deze te bundelen tot een boekje van 48 pagina's. Het voordeel was dat we gedwongen werden in de achtereenvolgende stencils een duidelijke lijn aan te brengen en een grotere mate van consistentie na te streven.
Ondanks onze ijver zijn er na een jaar gebruik nogal wat tekortkomingen aan te wijzen. Het verhaal van ons werkboekje is eigenlijk meer de beschrijving van een proces binnen onze school. De redaktie meende echter dat onze ervaringen voor andere collega's van nut konden zijn. Vandaar dat we, met veel aarzeling, hierover schrijven.

Hoe het begon

In 1976 startte in Lelystad de Chr. Scholengemeenschap 'De Brug'. Een werkgroep, bestaande uit bestuursleden, collega's uit het basisonderwijs en uit de Chr. Mavo 'Het Lichtschip' in Dronten, en twee medewerkers van het CPS in Hoevelaken, had in grote lijnen een werkplan opgezet dat door de ouders was geaccepteerd.
We zouden gaan werken vanuit een concept waarin we Evangelische uitgangspunten probeerden te vertalen in concrete onderwijssituaties. Daarom was o.a. gekozen voor tweejarige heterogene brugperiode (lbo tot atheneum), met differentiatie binnen klasseverband en ook voor werken in heterogene groepjes. Iedere nieuw-binnenkomende leraar is op deze conceptie benoemd.
Omdat de eerste groep leraren per 1 augustus 1976 in dienst kwam en de leerlingen op 15 augustus al voor de deur zouden staan bood het CPS hulp, o.a. door de school het materiaal dat in Franeker ontwikkeld was ter beschikking te stellen.
Na enkele maanden werken bleek dit wiskundemateriaal niet goed te passen bij onze situatie. (Leermoment: materiaal overnemen lukt zelden! Iedere school moet zijn eigen weg gaan.) Wel heeft dit materiaal inspirerend gewerkt op onze manier van denken en werken.
Het is duidelijk dat er geen tijd en gelegenheid was om een eigen leergang te

ontwerpen, dus ontstonden er bij het wiskundeboek (Moderne Wiskunde I) een serie stencils, sinds vorig jaar tot een werkboekje gebundeld.

Principe

Het principe waarop ons werkboekje berust is betrekkelijk eenvoudig. We behandelen de leerstof per hoofdstuk. In het werkboek staat stapsgewijs (per paragraaf) aangegeven hoe de leerling met het hoofdstuk moet omgaan. Begrippen die o.i. niet duidelijk zijn worden verhelderd; er worden vragen gesteld die het onderwerp beter hanteerbaar maken. Een tekening of een plaatje wordt toegevoegd; een schema zet (als invuloefening) de zaken nog eens op een rijtje; kleine oefeningetjes herhalen de stof van de vorige paragraaf; enkele groepsopdrachten stimuleren de samenwerking.
De opgaven van het werkboek helpen de leerlingen om zelfstandig, d.w.z. zonder klassikale uitleg, het hoofdstuk te begrijpen. Zo af en toe vermelden we wat de jongens en meisjes goed onthouden moeten. (Zie als voorbeeld de willekeurig gekozen bladzijde 17). In de opgegeven volgorde worden de vraagstukken gemaakt die tot de basisstof behoren. Als alle basisstof-opgaven gemaakt zijn volgt er een controletoets (diagnostisch). Na correctie volgt de verrijking of de herhaling. Ieder hoofdstuk wordt afgesloten met een extra taak van één bladzijde vol rekenopdrachten.

Werkwijze

Het werkboekje is in feite tegelijk ook een methode om de leerlingen te leren werken met behulp van schriftelijke instrukties.
De eerste weken worden er kleine opgaven gegeven die voor de leraar snel te controleren zijn. De leerlingen werken nog hoofdzakelijk klassikaal. De leraar houdt goed de vinger bij de pols en geeft aanwijzingen over werkwijze, werkverzorging e.d. De leerling leert omgaan met de controletoets en met het principe basisstof-verrijkingsstof. Na drie hoofdstukken wordt het werken in groepen van drie of vier aangekondigd, een manier van werken die hogere eisen stelt aan de scholier. 'Je moet naar elkaar kunnen luisteren, de ander helpen, je aan afspraken houden, kritiek durven geven en ertegen kunnen als je kritiek krijgt, enz.' Als blijkt dat de klas er nog niet aan toe is om met z'n drieën of vieren te werken, gaan we weer tijdelijk terug naar tweetallen, maar we blijven streven naar werken in groepjes.
Toch blijven er natuurlijk klassikale momenten. Voorbeelden hiervan zijn: een korte inleiding op het hoofdstuk of bespreken van een veel voorkomende vraag. In principe wordt echter pas besproken als er vragen gerezen zijn, niet om vragen te voorkomen.
Er komt een moment dat de groepjes samenwerken in eigen tempo. Iedere groep maakt zijn eigen afspraken over huiswerk. De groepen onderling kunnen een verschillende werkwijze hebben. De een doet veel op school en heeft weinig huiswerk. De andere besteedt zoveel tijd aan controle dat er veel huiswerk

Ⓛ Schrijf over en vul in

a) Als je van een gestrekte hoek een hoek van 45° afknipt houd je een [stompe / scherpe / rechte] hoek over van .....°

b) Als je van een [stompe / scherpe / rechte] hoek van 170° een hoek van 20° afknipt houd je een ~~rechte~~ .... hoek van ......° over.

c) een gestrekte hoek in 3 evengrote delen verdeeld geeft 3 ..... hoeken van .....°

d) een gestrekte hoek in 2 gelijke delen verdeeld geeft 2 ..... hoeken

e) een gestrekte hoek in 2 ongelijke delen verdeeld geeft altijd één ...... en één ...... hoek.

Ⓜ Op je geodriehoek staan ook graden aangegeven.
Teken met je geodriehoek een hoek van
a) 60° b) 90° c) 72° d) 135° e) 150°

Ⓝ Maak nu een tekening zoals op het voorblad van dit hoofdstuk.
Teken 10 cirkels en daarin de verschillende hoeken.
Gebruik je gradenboog (geodriehoek). Doe het netjes en kleur je tekening. In elk "wiel" een hoek kleuren!
Maak blz. 54 opgave 9, 10, 11, 12.

Ⓞ Bij O vind je in nevenstaand figuurtje 3 hoeken.

∠ O_1 is [scherp / recht / stomp / gestrekt], ∠ O_2 is ....., ∠ O_3 is ......

Je kunt inplaats van ∠ O_1 ook schrijven ∠ COB.
Waarom deze drie letters? Lees bladz. 54 en 55 door.

Ⓟ Bij B zijn 3 hoeken.

a) Als ∠ B_1 = 100° dan is ∠ B_2 = ...° en ∠ B_3 = ...°

b) Als ∠ B_1 = 110° dan is ∠ B_2 = ...° en ∠ B_3 = ...°

c) ∠ B_1 + ∠ B_2 = ...°

d) Een hoek van 90° heet ....

e) ∠ DBC = ∠ B_1, ∠ B_2 of ∠ B_3 ?

f) ∠ABD = ∠...

g) Een hoek van 180° heet ......

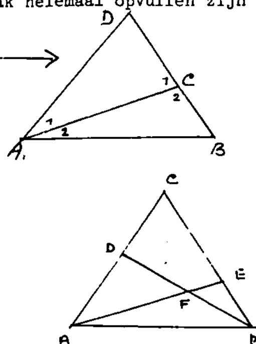
h) 5 hoeken van 45° aan elkaar gepast zijn samen .....°

i) 5 hoeken van 36° aan elkaar gepast zijn samen .....°

j) een gestrekte is een hoek waarvan de benen ....

k) hoeken bij één punt die het vlak helemaal opvullen zijn samen ......°

Ⓠ In deze tekening zijn [3 / 4 / 5 / 6] hoeken getekend. ⟶



Geef iedere hoek aan met drie letters, bv.

∠ A_1 = ∠ DAC   ∠ C_1 = ..
∠ A_2 = ∠...   ∠ C_2 = ..
∠ B = ∠...   ∠ D = ..

Ⓡ Maak deze tekening in je schrift (niet te klein!)
zet een ✱ in ∠ DCB
zet een ◘ in ∠ CDB
zet een 0 in ∠ EFB
zet een • in ∠ ABD

Ⓢ De grootste hoek die je met een geodriehoek kunt meten is .....°

17

nodig is. Met behulp van een werkblad heeft de leraar goed inzicht in de vorderingen. Op het werkblad van Jan de Kunst waarvan een fragment is afgedrukt, is te zien dat hij van paragraaf 4.2. opdracht A t/m M uit het werkboek af heeft

en dat hij thuis zal maken van blz. 17 opdracht N, O en P. Bovendien heeft hij al af rekentaak 4, opgave 1 t/m 6 en hij maakt ook opgave 7, 8, 9 en 10.

Jan de Kunst
1b

Hoofdstuk 4 :
§ 4.1.
§ 4.2 N O P Q R S
§ 4.3
Verrijking : § 4.3 2 3 4 5 6
§ 12.4 1 2a 3 5 6 7 8 9 11
Taak 4 7 8 9 10 11 12 13

De leraar kan ingrijpen als het tempo te laag ligt. Als iedereen de basisstof verwerkt heeft wordt er één les besteed aan een samenvatting van het hoofdstuk en eventuele vragen. Dan volgt de eindtoets, deze bestaat uit twee delen, één deel met vragen en opgaven uit de basisstof en een deel over de verrijkingsstof. Leerlingen die te langzaam gewerkt hebben, konstateren dat ze de toets over de verrijkingsstof niet goed maken kunnen. Na de controletoets werkt ieder lid van de groep in eigen tempo verder. Voor sommigen zal dat echter alleen herhaling betekenen, anderen gaan door met de verrijking.
Na de eindtoets begint de hele klas tegelijk aan het volgende hoofdstuk.

Ervaringen

Bij het werken in groepen is een grote mate van zelfstandigheid aanwezig. Vooral op de goede leerling wordt een sterk beroep gedaan om het zelf te doen. De leraar besteedt vrijwel geen aandacht aan hem. Door een royaal aanbod aan verrijking kan men in de heterogene klas de tempoverschillen opvangen. De momenteel aanwezige verrijkingsstof is niet helemaal voldoende. Goede, vooral zinnige, extra stof is belangrijk. Sommige leerlingen zijn ongelooflijk hongerig. De ervaring heeft geleerd dat deze extra verrijkingsstof, voorzover ze geen rol speelt bij de eindtoets, voor steeds minder jongens en meisjes motiverend is. De wijze van waardering voor deze extra stof moet nog verder doordacht worden. Een duidelijk voordeel is dat het leerboek niet langer overheersend is. De pre-

sentatie en de leerstofkeuze wordt nu vooral door de school bepaald. Het wiskundeboek is meer een opgavenboek geworden. Bovendien is er een heel eigen inbreng mogelijk waarbij een bepaald hoofdstuk weggelaten kan worden en een andere kan worden toegevoegd.

Wat we verzuimden te doen

Omdat er in onze situatie geen andere keus was, zijn we begonnen zonder veel overleg en bezinning. Dat betekent dat nu pas, na meer dan een jaar gebruik, de keuze van basis- en verrijkingsstof ter diskussie komt. Waarom is een bepaald onderwerp basisstof, wat staat ons voor ogen, welke doelstellingen hebben we. Verder staan de rekenvraagstukken wat onderwerp betreft los van de rest van het hoofdstuk, maar dat is niet funktioneel. De vakgroep wiskunde is nu begonnen ieder hoofdstuk te bespreken en na gebruik te evalueren. Wat was goed, wat moet anders? Al werkende komt de fundamentele diskussie op gang over een praktische wiskunde die aansluit bij de ervaring van de leerling. De ontwikkelingen zijn volop aan de gang. Over enkele jaren is er misschien van het oorspronkelijke ontwerp niet veel meer over. Ons werkboekje is maar een tussenstadium, geen eindpunt.

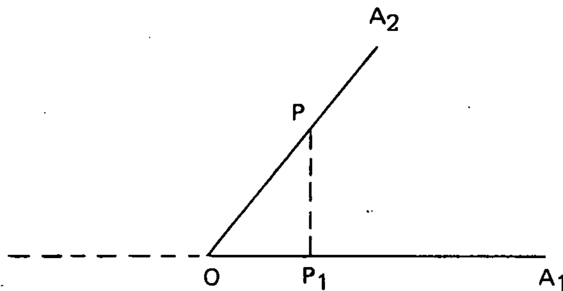
Over de auteur:

H. G. Heusinkveld is sinds 1951 bij het onderwijs, voornamelijk als wiskundeleraar.
Via een functie bij het C.P.S. in Hoevelaken werd hij betrokken bij de voorbereidingen van de Chr. Scholengemeenschap in Lelystad. Hij werkte van 1-8-76 tot 1-8-79 aan deze school, o.a. als wiskundeleraar. Sindsdien werkt hij in C.P.S.-verband mee aan de voorbereiding van een project Verdieping Christelijk Voortgezet Onderwijs.

Sinus en Cosinus

O. BOTTEMA

1 De sinus en cosinus van een hoek zijn niet alleen door hun namen maar ook door hun eigenschappen twee nauw verwante functies. Zij hebben dezelfde periode 2π : $\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha$; hun waardengebied is hetzelfde: $-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$, $-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$; hun grafieken zijn zelfs congruent en liggen alleen t.o.v. elkaar verschoven: $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$. Ze vertonen echter ook een essentieel verschil. De cosinus is een *even* funtie: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; de sinus is een *oneven* functie: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. De consequenties hiervan vormen de inhoud van dit opstel.



Figuur 1

Het heeft weinig zin over $-\alpha$ te spreken als men geen negatieve hoeken in zijn beschouwingen betrekt. Wij zullen daarom met *gerichte* hoeken werken. Een hoek is de figuur van twee halfrechten OA_1 en OA_2 door het hoekpunt O (fig. 1) $\angle A_1OA_2$ is dan het tegengestelde van $\angle A_2OA_1$. Welke van de twee positief wordt gerekend hangt van een conventie af. In onze goniometrie wordt een rotatie links-om bevoorrecht; de wijzers van een klok draaien dan in negatieve richting. In onze figuur 1 is A_1OA_2 een positieve hoek. Wij hebben, zoals men zegt, ons platte vlak *georiënteerd.*

Om de sinus en de cosinus van A_1OA_2 te definiëren, nemen wij op OA_2 een punt P; de projectie van P op de drager van OA_1 zij P_1. Dan is $\cos(A_1OA_2) = OP_1/OP$ (waarbij OP_1 negatief wordt gerekend als P_1 op de complementaire halfrechte van OA_1 ligt). Het is duidelijk dat deze verhouding er niet van afhangt hoe het vlak georiënteerd is. De uitspraak $\cos\alpha$ is een even

functie blijkt gelijkwaardig met: *cos α is onafhankelijk van de oriëntatie van het vlak.* De sinus A_1OA_2 is bij definitie PP_1/OP en hangt er dus van af welk teken aan PP_1 wordt gehecht. In fig. 1 ligt bij een draaiing links-om P in het positieve halfvlak en PP_1 is dan positief; bij de andere oriëntatie is PP_1 negatief. Dus: *sinussen van hoeken gaan in hun tegengestelde over als de oriëntatie van het vlak wordt gewijzigd.* Hetzelfde geldt blijkbaar voor de tangens.

2 Welke consequenties hebben deze twee uitspraken voor de formules der goniometrie? Het is duidelijk dat wij niet gaarne willen werken met relaties waarbij de arbitraire keuze der oriëntatie van invloed zou zijn. Dat betekent dat zij niet mogen veranderen als aanwezige sinussen door hun tegengestelde worden vervangen. Daaruit volgt: *als in een goniometrische identiteit sinussen voorkomen dan zijn ze of alle van even of alle van oneven graad.* Voor de cosinussen geldt zo'n conditie niet; die zijn immuun voor een wijziging der oriëntatie; wij geven enige voorbeelden:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{2.1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{2.2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{2.3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \tag{2.4}$$

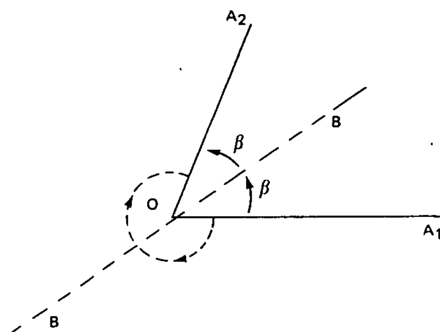
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \tag{2.5}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \tag{2.6}$$

$$(1 - \tan\alpha\tan\beta)\tan(\alpha + \beta) = \tan\alpha + \tan\beta \tag{2.7}$$

In (1) komen de sinussen alleen voor in de graad 1, de cosinussen in 0 en 1; in (2) zijn de sinussen van de graad 0 en 2, de cosinussen van de graad 0, 1 en 2; in (5) gelden voor de sinus 0 en 2, voor de cosinus 0 en 1; in (7) zijn de graden der tangenten 1 en 3.

Komt in een formule sin Nx voor, waarbij N een geheel getal is, dan wordt ook deze door zijn tegengestelde vervangen; dat is trouwens bij (3), (4), (5) en (6) reeds toegepast.
Geheel verschillend is de regel als in de formules $\frac{1}{2}\alpha$ voorkomt of algemener $\frac{p}{q}\alpha$, p en q geheel. Daarbij moet worden bedacht dat de helft van een hoek een dubbelzinnig begrip is. Twee hoeken α en α' hebben dezelfde goniometrische functies als $\alpha \equiv \alpha' \pmod{2\pi}$; uit $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ volgt $\frac{1}{2}\alpha' = \frac{1}{2}\alpha + k\pi$; er zijn dus twee modulo 2π verschillende halve hoeken: $\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha$ en $\beta_2 = \beta_1 + \pi$. Dit blijkt ook uit de formules zoals $\sin^2\frac{1}{2}\alpha = (1 - \cos\alpha)/2$.
Figuur 2 vraagt nu onze aandacht. Gegeven is de positieve hoek A_1OA_2; OB is de binnenbissectrice: $A_1OB = BOA_2 = \beta$ en $A_1OB + BOA_2 = A_1OA_2$. Bij verandering der oriëntatie is A_1OA_2 de rechts-om doorlopen inspringende hoek, groot $2\pi - \alpha$. Zijn bissectrice OB_1 ligt in het verlengde van OB; de helft



Figuur 2

van de hoek is $A_1OB_1 = \pi - \beta$. Daaruit volgt dat $\sin \frac{1}{2}\alpha$ onveranderd blijft terwijl $\cos(\pi - \frac{1}{2}\alpha) = -\cos \frac{1}{2}\alpha$. Onze regel moet dus als volgt worden uitgebreid: *goniometrische identiteiten veranderen niet als overal* $\sin \alpha$ *door* $-\sin \alpha$ *en* $\cos \frac{1}{2}\alpha$ *door* $-\cos \frac{1}{2}\alpha$ *wordt vervangen*; voor $\cos \alpha$ en $\sin \frac{1}{2}\alpha$ geldt een dergelijke conditie niet. Een paar voorbeelden zijn:

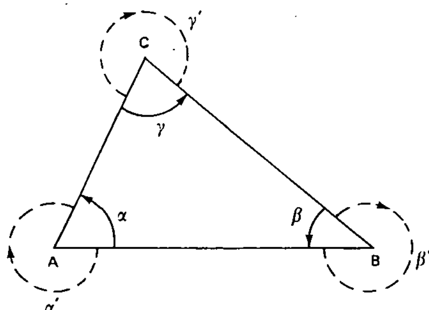
$$\sin \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha, \tag{2.8}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}\alpha}, \tag{2.9}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{1}{2}\alpha}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}\alpha}. \tag{2.10}$$

Met onze boven geformuleerde regel kan men uitkomsten testen. Het is een negatieve controle: wordt aan de regel voldaan dan *kan* het antwoord goed zijn, in het andere geval is het zeker fout.

3 Wij gaan naar de trigonometrie en beschouwen de driehoek ABC met de zijden a, b, c en de hoeken α, β, γ. Bij de gebruikelijke elementaire behandeling zijn de hoeken positief. Iets ruimer gezegd: α voldoet mod. 2π aan $0 < \alpha < \pi$ en het analoge geldt voor β en γ.
Men heeft $\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Wij staan nu gerichte hoeken toe: verandert de oriëntatie dan gaan α, β, γ over in $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ of wel in $\alpha' = 2\pi - \alpha$, $\beta' = 2\pi - \beta$, $\gamma' = 2\pi - \gamma$; daarbij geldt $\alpha' + \beta' + \gamma' \equiv \pi \pmod{2\pi}$. (*fig. 3*).



Figuur 3

Dit is consequent gedaan door Schuh[1] en in navolging van hem door Harkink[2] met het oog op bepaalde vereenvoudigingen bij geodetisch rekenwerk. Beide auteurs gaan nog verder en geven ook een teken aan *a*, *b* en *c* door op elke zijlijn een positieve richting aan te nemen. Bij een figuur van drie punten behoren dan *acht* driehoeken. Voor sommige beschouwingen geeft dat enig voordeel, maar er ontstaan toch ook wel onoverzichtelijke complicaties. *Wij handhaven dat a, b en c positieve getallen voorstellen.*
Betrekkingen tussen zijden en hoeken kunnen met onze regel worden geverifieerd. Voorbeelden zijn

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \tag{3.1}$$

$$bc\sin\alpha = ca\sin\beta = ab\sin\gamma, \tag{3.2}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0, \tag{3.3}$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \tag{3.4}$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1 = 0, \tag{3.5}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = 0, \tag{3.6}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \tag{3.7}$$

$$-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1 = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \tag{3.8}$$

die wel geen nadere toelichting vergen.
Als van een driehoek de zijden gegeven zijn dan volgen daaruit wèl de cosinussen der hoeken:

$$\cos\alpha = (-a^2 + b^2 + c^2)/2bc, \tag{3.9}$$

maar niet de sinussen; die zijn wegens de dubbelzinnigheid van het worteltrekken nog onbepaald:

$$b^2c^2\sin^2\alpha = 4s(s-a)(s-b)(s-c). \tag{3.10}$$

4 In de driehoeksmeting komen ook andere grootheden aan de orde: de oppervlakte *F*, de hoogtelijnen h_a, h_b en h_c en stralen van de om-, de in- en de aangeschreven cirkels R, r, r_a, r_b, r_c.
Uit de formule

$$2F = bc\sin\alpha \tag{4.1}$$

moeten wij de conclusie trekken dat de oriëntatie van het vlak het teken van *F* bepaalt. Het is trouwens in de geometrie een bekende en nuttige afspraak om aan de driehoeken *ABC* en *ACB* een tegengestelde oppervlakte toe te kennen. De analytische meetkunde met haar formule

$$2F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

voor de oppervlakte van de driehoek waarvan de hoekpunten de rechthoekige coördinaten (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ hebben, voert automatisch tot een dergelijk besluit. (Merk op dat bij 4.2 een georiënteerd assenstelsel ondersteld wordt). De zijden a, b, c bepalen F al evenmin als dat zij de sinussen der hoeken vastleggen: in de s-formule van Heron komt de vierkantswortel voor.
Een consequentie is nog dat ook de hoogtelijnen een teken krijgen

$$h_c = b \sin \alpha = a \sin \beta = c \sin \alpha \sin \beta / \sin \gamma. \qquad (4.3)$$

De straal R van de omgeschreven cirkel moet zich wegens $R = a/(2 \sin \alpha) = abc/4F$ bij de ingevoerde nuancering der begrippen aansluiten. Een cirkel in de gangbare zin draagt twee *cykels* met tegengestelde stralen. Een pijl in zijn omtrek is trouwens de duidelijkste weergave der gekozen oriëntatie. Als men bedenkt dat de oppervlakte van een cirkel de limiet is van die van een ingeschreven veelhoek, dan vindt men voor de oppervlakte van een cirkel met straal ρ het antwoord $\pi|\rho| \cdot \rho$.
Wij hebben in §2 gezien dat de binnen- (en dus ook de buiten-) bissectrice van een hoek onafhankelijk is van de oriëntatie van het vlak. Daaruit volgt dat de middelpunten van de in- en aangeschreven cirkels daar evenmin van afhangen – een opmerking die minder triviaal is dan zij lijkt als wij straks in §5 een verwante vraag stellen.
De stralen r, r_a, r_b; r_c krijgen nu natuurlijk ook een teken, en wel hetzelfde als R. Formules die dat bevestigen en aan onze criteria voldoen zijn bijv.:

$$r = F/s, \qquad (4.4)$$

$$r = (s - a)\tan \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad (4.5)$$

$$r = a \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma / \cos \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad (4.6)$$

$$r = 4R \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad (4.7)$$

$$r_a = s \tan \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad (4.8)$$

$$r_a = 4R \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma. \qquad (4.9)$$

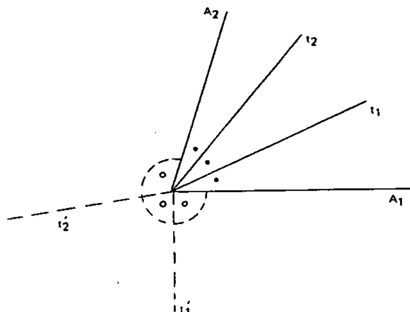
Is A, B, C de voetpuntsdriehoek van een punt P t.o.v. ABC en F_1 zijn oppervlakte dan is volgens een stelling van Gergonne, als M het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC is:

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(R^2 - PM^2)\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \qquad (4.10)$$

$$F_1 = \tfrac{1}{4}F(R^2 - PM^2)/R^2. \qquad (4.11)$$

Zij gelden in deze vorm ten duidelijkste álleen dan als het vlak georiënteerd is.

5 Wij beschouwen de beide binnen-*tri*sectrices t_1, t_2 van een hoek A_1OA_2 in een positief georiënteerd vlak. (*figuur 4*). Is $A_1OA_2 = \alpha$, dan is $A_1Ot_1 = t_1Ot_2 = t_2OA_2 = \alpha/3$.

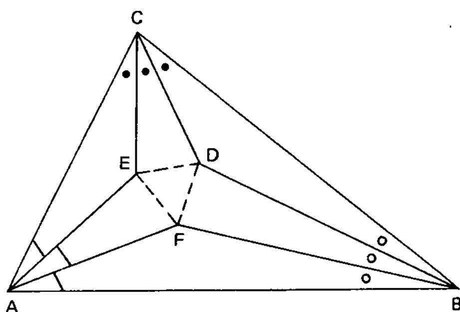


Figuur 4

Gaan wij op de andere oriëntatie over, dan moeten wij de inspringende hoek A_1OA_2 (in wijzerrichting gemeten) in drieën delen:

$A_1Ot'_1 = t'_1Ot'_2 = t'_2OA_2 = (2\pi - \alpha)/3$. Men heeft $t_1Ot'_1 = 2\pi/3$ en $t_1Ot'_2 = 4\pi/3 - \alpha/3$, die (wegens $\alpha \neq \pi$) geen van beide gelijk zijn aan π.

De conclusie is: t'_1 en t'_2 liggen *niet* in de verlengden van t_1 of t_2, zoals dat bij de *bis*sectrice het geval was. *Bij wijziging van de oriëntatie zijn de binnentrisectrices niet invariant*; zij gaan over in een soort buitentrisectrices.



Figuur 5

De trisectrices van een driehoek komen voor in de configuratie van *figuur 5*. *AF* en *AE* zijn de trisectrices van *A*, *BD* en *BF* die van *B*, *CE* en *CD* die van *C*. De merkwaardige stelling van Morley luidt: *driehoek DEF is gelijkzijdig*. Wij geraken tot de uitspraak: de driehoek van Morley is *niet* invariant bij wijziging van de oriëntatie van het vlak.
Van de bewijzen voor de stelling van Morley (er zijn er meer[3]) is het volgende gebruikelijk. Van driehoek *ABF* zijn de hoeken en een zijde bekend, zodat *AF* te bepalen is; evenzo volgt *AE* uit de driehoek *ACE*; van *AEF* kennen wij dan drie elementen, zodat *EF* te berekenen is. Na een niet al te eenvoudige herleiding komt het fraaie resultaat $EF = 8R \sin\alpha/3 \sin\beta/3 \sin\gamma/3$, dat door zijn symmetrie tot de conclusie $EF = FD = DE$ leidt. Het is duidelijk dat bij

tegengestelde oriëntatie hetzelfde bewijs geldt en dezelfde conclusie volgt als men telkens R door $-R$, α door $2\pi - \alpha$, β door $2\pi - \beta$ en γ door $2\pi - \gamma$ vervangt. Er ontstaat een andere gelijkzijdige driehoek $D'E'F'$ die ook een andere zijde heeft dan DEF, want de uitdrukking voor EF blijft voor oriëntatiewijziging niet invariant. De conclusie dat er dus twee driehoeken van Morley zijn is niet verrassend als men weet dat Van IJzeren[4] reeds in 1938 een generalisatie van de stelling heeft ontdekt, waarbij door het opereren met buitentrisectrices van verschillende soort op fraaie wijze de existentie van zelfs 18 gelijkzijdige driehoeken werd aangetoond; zij hebben samen 27 verschillende hoekpunten. De algemene figuur is door Schuh[5] en opnieuw door Van IJzeren[6] uitvoerig besproken. De eerste heeft daarbij een nuttige notatie voor de verschillende driehoeken ingevoerd.

Wij laten het aan de lezer over om na te gaan welke negen paren door oriëntatiewijziging met elkaar samenhangen; in de notatie van Schuh krijgt de oorspronkelijke driehoek, van figuur 5, de classificatie (0, 0, 0), en de boven gevondende is (2, 2, 2).

Literatuur

1 Fred. Schuh, *Leerboek der nieuwe vlakke driehoeksmeting*, (Den Haag, 1939).
2 F. Harkink, *Gerichte vlakke driehoeksmeting en elementaire landmeetkundige berekeningen*, (Amsterdam, 1945; 2e druk, 1957).
3 Zie bijv. O. Bottema, *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*, (Den Haag, 1944), 33-35.
4 J. van IJzeren, *De 'stelling van Runge'*, N. Arch. v. Wisk., 19 (1938) 113-128; *De stelling van Morley in verband met een merkwaardig soort zeshoeken*, Euclides 14, (1938), 277-284.
5 Fred. Schuh, t.a.p. 254-264.
6 J. van IJzeren, *Moderne vlakke meetkunde*, (Zutphen, 1941), 110-114.

Informatika en basic

IR G. J. T. A. BAKX

Aanleiding

Twee ontwikkelingen, zoals die zich op dit moment aan het voltrekken zijn, zijn aanleiding voor mij tot het schrijven van dit artikel.[1])
De eerste daarvan is, dat de HEWET-kommissie in haar voorstellen tot herverkaveling van wiskunde I en II van het vwo het onderdeel 'automatische gegevensverwerking' in het programma van wiskunde A wil opnemen. De tweede is het feit dat de mikrokomputer zich op allerlei plaatsen in de maatschappij een plaats aan het veroveren is. Het ligt in de lijn der verwachtingen dat ook scholen zich van deze apparatuur in de nabije toekomst zullen voorzien (enkele hebben dat reeds gedaan). Momenteel is het zo dat er veelal mikrokomputers op de markt worden gebracht die zich bedienen van de programmeertaal 'Basic' en het lijkt daarom interessant na te gaan of het onderdeel informatika van wiskunde A met deze taal als gereedschap tot de gewenste doeleinden kan komen. Ik wil dat proberen door enkele gedachten neer te schrijven over doeleinden van informatika-onderwijs en eisen die daarom gesteld worden aan het gereedschap daarvoor: de programmeertaal.

Doeleinden van het informatika-onderwijs

De HEWET-kommissie noteert hierover het volgende:
- het door analyse leren formuleren en formaliseren van konkrete problemen,
- het leren vinden door dergelijke problemen van konstruktieve oplossingsmethoden,
- het enigszins vertrouwd raken met de werkwijze en toepassingen van de komputer.

Een van belang zijnde opmerking van de kommissie lijkt me:
'Het gaat erom dat zij (de leerlingen) er besef van hebben wat een komputer zoal kan doen, zodat zij in voorkomende gevallen naar een komputer-expert kunnen gaan. Dit besef, niet de vakbekwaamheid is wat alle leerlingen op school moeten opdoen.'
Als beoogd (neven)effekt noteert de kommissie
'een sterk operationele, algoritmische en organisatorische instelling'.

We mogen konkluderen dat dit gedeelte van het leerplan zich gaat richten op het probleem-oplossen met behulp van de komputer. Daarvoor lenen zich problemen wier oplossing het ontwerpen van algoritmen vraagt. In de literatuur ziet men dan ook vaak als doel van het informatika-onderwijs geformuleerd het leren konstrueren, formuleren en verifiëren van algoritmen en het leren konstrueren van een komputer-programma overeenkomstig de algoritmische oplossingen. Vastgesteld moet worden dat *niet* het doel mag zijn het inoefenen van de verschillende 'zinskonstrukties' van de programmeertaal aan de hand van allerlei deelproblemen. Dat moet duidelijk middel zijn voor het bereiken van het andere doel: het leren probleem-oplossen met behulp van de komputer.

Voor een optimaal ontwerpen en verifieerbaar opstellen van algoritmen ziet men in de literatuur een houding aangeprezen onder o.a. de titel 'top-down benadering'. Dit is een wijze van probleem-oplossen waarbij in eerste instantie het probleem precies, maar in globale termen wordt beschreven. Dan wordt een eerste ontwerp voor een oplossing geformuleerd, waarbij het hoofdprobleem ontleed wordt in onderscheidbare, eveneens globaal omschreven deelproblemen. Van elk deelprobleem wordt duidelijk vastgesteld wat de kondities zijn vóór en ná het oplossen ervan, om zich ervan te kunnen vergewissen dat de deeloplossingen juist op elkaar aansluiten en tot de gewenste totaaloplossing leiden. Vervolgens worden de deeloplossingen steeds gedetailleerder ontworpen en benadert de 'analysetaal' steeds meer het vokabulair van de programmeertaal. Men noemt dit ook wel 'gestruktureerd programmeren'.

Wanneer de HEWET-kommissie opmerkt dat de leerlingen niet de vakbekwaamheid moeten opdoen, wordt daar natuurlijk mee bedoeld dat we leerlingen niet moeten of kunnen brengen tot volleerd programmeur-zijn. In voorkomende gevallen moeten zij met een dergelijk persoon kunnen kommuniceren. Zij moeten dus kunnen herkennen wanneer een komputer kan of hoort te worden gebruikt. Dat impliceert, naast het idee hoe programma's voor komputers geschreven worden, het verstandig kunnen kiezen uit en het gebruik maken van (door anderen) voorafgeschreven standaard-programma's.

Eisen aan een edukatieve programmeertaal.

Men kan in de literatuur daarover verschillende opmerkingen vinden. Een belangrijke eis is dat de programmeertaal hulpmiddelen moet bieden voor het adequaat formuleren en analyseren van problemen. Zij moet het mogelijk maken beknopt, gestruktureerd en helder, en daarom efficiënt, te programmeren en niet verleiden tot 'truc-matig' programmeren. De taal moet middelen bieden voor het struktureren van zowel de programma's als de gegevens voor het programma. De taal moet de elementaire begrippen van het komputer-programmeren zo natuurlijk, begrijpelijk en beknopt als mogelijk weerspiegelen. De opbouwregels van de taal moeten eenvoudig, doelmatig en systematisch zijn. Ook moeten de kosten voor het aanschaffen, installeren, gebruiken en onderhouden van een voor de taal geschikt verwerkingssysteem (processor) niet te hoog liggen.

Meer specifiek lijkt het me nuttig iets op te merken over twee onderdelen van

programmeertalen, namelijk de 'goto'-opdracht (ga-naar) en de procedure/funktie.
De goto-opdracht biedt de programmeur de mogelijkheid de processor op een gegeven moment en onder bepaalde kondities tijdens het verwerken van het programma deze verwerking op een willekeurige plaats in de tekst van het programma te doen voortzetten, aangegeven door een label dat zowel verderop als terug in de tekst kan staan. De moeilijkheid die daarbij ontstaat is, dat wanneer iemand het programma wil verifiëren en de toestand wil beschrijven zoals die is bij het label, hij de 'voorgeschiedenis' moet kennen. Die is dan vaak moeilijk of niet te beschrijven (bijvoorbeeld: worden aan de kondities voor de goto-opdracht wel of niet voldaan). Wanneer meerdere goto-opdrachten in het programma opgenomen zijn is het gevaar erg groot dat een buitenstaander het programma niet of nauwelijks kan begrijpen. Er ontstaat een soort 'spaghetti'-struktuur die verifikatie nagenoeg onmogelijk maakt. Dit leidt tot de wens dat de gehanteerde programmeertaal mogelijkheden biedt om (bijna) alle goto-opdrachten op een gemakkelijke en natuurlijke wijze te vermijden.
Vervolgens iets over procedure en funktie. Gestruktureerd programmeren houdt in het indelen, onderverdelen en strukturеren van probleem en programma in logisch samenhangende komponenten. Deze komponenten worden onafhankelijk geprogrammeerd en moeten dan zodanig in het programma opgenomen worden dat een heldere dokumentatie ontstaat over de variabelen die beïnvloed worden, voorwaarden waaronder gewenste (tussen)resultaten bereikt worden en variabelen die slechts van lokale, alleen voor de betreffende komponent relevante, betekenis zijn. Hiermee wordt een heldere en verifieerbare aansluiting van de komponenten gerealiseerd. De procedure en funktie bieden deze mogelijkheid. Het zijn namelijk samenvattingen van een pakket opdrachten en/of bewerkingen, waarbij elk pakket een naam krijgt toebedeeld en bij definiëring van het pakket aan het begin van het programma de noodzakelijke dokumentatie gegeven kan worden. Het pakket wordt verder in het programma bij verwerking geaktiveerd door het noemen van de naam en het substitueren van noodzakelijke parameters. Een eventueel gewenste nadere uitleg van wat procedures en funkties zijn, gaat voorbij aan het doel van dit artikel en laat ik daarom achterwege. Het kernpunt is dat de procedure en funktie een krachtig gereedschap bieden bij het gestruktureerd programmeren. Van sekundair belang is dan dat het ook de mogelijkheid biedt de programma-tekst te verkorten wanneer eenzelfde pakket opdrachten of operaties meerdere keren hierin voorkomt. Een tweede wens is dus dat de gehanteerde programmeertaal deze mogelijkheid in zich bergt.

Is Basic geschikt?

Zoals reeds opgemerkt bedienen de huidige op de markt zijnde mikrokomputers zich meestal van de taal Basic.
In de kringen van informatici hoort men de stelling dat wanneer je eenmaal met een bepaalde komputer-taal bent opgegroeid en jezelf de wijze van denken hebt eigengemaakt die het werken met die taal met zich meebrengt, het later erg moeilijk is jezelf een andere denkwijze van een andere taal eigen te maken. Het

kiezen van de eerste taal is daarom van groot belang.
De vraag is nu: is Basic een goede eerste keuze? Velen zeggen van niet. Zij stellen dat het leren van Basic alleen goed is voor hen die later in Basic moeten kunnen programmeren en niet voor hen die moeten leren programmeren in het algemeen. Argumenten hiervoor zijn de volgende.
Basic stelt in het algemeen slechts een beperkt aantal naamgevingen voor variabelen beschikbaar. Het bevordert echter de leesbaarheid van een programma in hoge mate als de naam van een variabele zo goed mogelijk 'de lading dekt'. Met Basic is dat dus nauwelijks mogelijk. Mede hierdoor ontstaat vooral bij langere programma's in Basic een onoverzichtelijk en nauwelijks leesbaar geheel. De taal biedt verder een erg beperkt pakket van middelen om gegevens te struktureren en biedt niet de mogelijkheid om programma-onderdelen onafhankelijk te definiëren. De procedure en funktie of andere mogelijkheden voor volkomen onafhankelijke subprogramma's, bijvoorbeeld het invoeren van lokale variabelen, kent de taal niet. Dientengevolge wordt de voor het probleem-oplossen met behulp van de komputer zo wenselijke denkwijze, namelijk de in eerste aanzet top-down benadering en de stapsgewijze gestruktureerde opzet en verifikatie, niet aangeleerd en voor de toekomst dus afgeleerd. Ongetwijfeld is hier sprake van een zekere overdrijving van zaken, maar het is een boodschap die we toch ter harte kunnen nemen.
Is er dan een alternatief? De meest genoemde is Pascal. Die taal levert een 'machine' op die goed, snel en efficiënt het programma kan verwerken. Ze heeft veel krachtig gereedschap en biedt goede mogelijkheden voor het struktureren van programma's en gegevens. De goto-opdrachten kunnen worden vermeden. Natuurlijk heeft ze ook nadelen. Ze is iets minder snel te leren als Basic en vraagt iets meer van het systeem voordat verwerking van het programma plaatsvindt. Verder moet de omvang van te struktureren gegevens van te voren vastgelegd worden, wat in de praktijk soms moeilijkheden oplevert.

Konklusie

Uiteraard dient te worden afgesloten met een moraal. Deze is naar mijn mening de volgende.
Het feit dat informatika een substantieel onderdeel gaat worden van het wiskunde-programma van het vwo, ook al is het nu nog beperkt qua omvang en niveau, en het feit dat de mikrokomputers een plaats gaan vinden op de scholen en mogelijk dus ook in het onderwijs, maakt dat we niet te snel een 'huwelijk' moeten aangaan met Basic en op basis van deze taal allerlei leermateriaal moeten ontwerpen. Eerst moeten we kritisch nagaan welke taal het beste als aanzet kan fungeren voor het informatika-onderwijs. Bestaat deze al (Pascal, of een deel daarvan?) of moet deze nog ontworpen worden?

[1] Aan de totstandkoming hebben meegewerkt drs. H. Berendsen en drs. Th. van der Genugten, beiden werkzaam aan de Technische Hogeschool Twente, vakgroep informatika.

Literatuur

Rapport van de Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en Wiskunde II vwo, Staatsuitgeverij, 's-Gravenhage, 1980.

Dahl, O. J./Dijkstra, E. W./Hoare, C. A. R. *Structured Programming*, Academic Press, London, 1972.

Johnson, D. C./Tinsley, J. D. (ed.), *Informatics and Mathematics in Secondary Schools, impacts and relationships*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

Lecarme, O,/Lewis, R. (ed.), *Computers in Education*, North Holland/American Elsevier, 1975.

Turski, W. M. (ed.), *Programming Teaching Techniques*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.

Wirth, N., *Systematisches Programmieren, eine Einführung*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.

***Over de auteur*:**

Sir Bakx heeft elektrotechniek gestudeerd aan de TH te Eindhoven. Van 1973 tot 1978 was hij werkzaam als leraar aan het Odulphus-lyceum te Tilburg, aanvankelijk zowel voor wiskunde en natuurkunde, later alleen voor wiskunde. Sinds 1978 is hij werkzaam als docent wiskunde-didactiek aan de TH Twente.



NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 1980
Eerste ronde: vrijdag 21 maart 14.00-17.00 uur

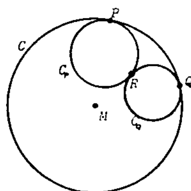
A1
Caroline is precies 33 jaar ouder dan Karel. Zij is op dit moment 12 keer zo oud als Karel was toen zij zo oud was als Karel nu is. Hoe oud zijn Caroline en Karel nu?
A2
Een van de hoeken van een rechthoekige driehoek is 15° groot. De lengte van de schuine zijde is 6. Bepaal de oppervlakte van die driehoek.
A3
Gegeven is de vergelijking:

$$x^3(5-x)^3 + px^2(5-x)^2 + qx(5-x) + r = 0,$$

waarin p, q en r zekere reële constanten zijn, heeft als oplossingen 7, $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{13}$.
Bepaal nog drie andere oplossingen.
A4
Een gelijkzijdige driehoek D en een regelmatige zeshoek Z hebben dezelfde omtrek. De oppervlakte van D is 1.
Bepaal de oppervlakte van Z.

B1
Bereken de som van alle natuurlijke getallen van vier verschillende oneven cijfers.
B2
Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$. Op de ribben AB, AD, AE, GC, GF en GH kiest men punten P, Q, R, S, T en U zo, dat $AP = AQ = AR = GS = GT = GU$. De verhouding $AP : AB$ wordt α genoemd.
Hoe groot moet men α nemen opdat $PQRSTU$ een regelmatig achtvlak is?
B3
Bepaal het kleinste gehele getal n groter dan 1 met de eigenschap dat het produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ een geheel veelvoud is van n^7.
B4
Gegeven is een driehoek ABC. Een *koorde* van de driehoek is een lijnstuk waarvan elk van de uiteinden een punt is van een van de zijden van de driehoek. Bepaal de verzameling van alle punten binnen driehoek ABC die het midden zijn van precies *drie* koorden van driehoek ABC.

C1
Op een cirkel C met middelpunt M liggen twee punten P en Q. P, Q en M liggen niet op één lijn. De cirkels C_P en C_Q liggen geheel binnen C, raken C in P resp. Q, en elkaar in een punt R (zie tekening).



Welke verzameling beschrijft R als men C_P en C_Q bij vaste P en Q varieërt?

C2
In het vlak is een twaalfhoek T gegeven zonder inspringende hoeken. Van de diagnonalen van T gaan er geen drie door één punt. Men tekent alle diagonalen binnen T.
Hoeveel snijpunten ontstaan er?

C3
Hoeveel rijtjes van zes (niet noodzakelijk verschillende) getallen zijn er met de volgende twee eigenschappen:
- elk getal is een element van de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en
- in zo'n rijtje komen niet twee even getallen naast elkaar voor.

(Men noemt twee rijtjes slechts dan gelijk als ze dezelfde getallen *in dezelfde volgorde* bevatten.)

C4
Bepaal het grootste aantal stukken waarin de ruimte verdeeld kan worden door vijf platte vlakken.

Opg.	*Antwoord*	*Opmerkingen*
A1	Caroline is 72 jaar; Karel is 39 jaar.	Elke goede leeftijd: 1 punt
A2	$4\frac{1}{2}$	
A3	$-2,\ 5-\sqrt{5},\ 5+\sqrt{13}$	Twee van de drie oplossingen goed: 1 punt; minder dan 2 oplossingen goed: 0 punten.
A4	$1\frac{1}{2}$	
B1	666600	
B2	$\alpha = \frac{3}{4}$	
B3	$n = 24$	
B4	Het binnengebied van driehoek PQR, waarbij P, Q en R de middens van de zijden van driehoek ABC zijn.	2 punten indien niet expliciet vermeld wordt dat alleen de punten van het *binnengebied* van driehoek PQR voldoen.
C1	De boog binnen C van de cirkel die C in P en Q loodrecht snijdt.	Elke adequate beschrijving van deze cirkelboog wordt goed gerekend. Geeft men als oplossing de *gehele* cirkel in plaats van alleen de boog binnen C, dan worden 2 punten gegeven. Geen

Opg.	*Antwoord*	*Opmerkingen*
		puntenaftrek wordt toegepast als men de uiteinden P en Q van de cirkelboog tot de oplossingsverzameling rekent.
C2	495	
C3	$15309 (= 7 \cdot 3^7)$	
C4	26	

WAARDERING: categorie A: 2 punten per opgave
categorie B: 3 punten per opgave
categorie C: 4 punten per opgave

SCORE	BEHAALD DOOR AANTAL DEELNEMERS
0/1	69
2	651
3	66
4	470
5	180
6	180
7	210
8	72
9	136
10	73
11	57
12	47
13	35
14	28
15	11
16	16
17	13
18	6
19	5
20	5
21	1
22	2
23	3
24	1
25	–
26	2
27	1
28	1
29	2

Totaal aantal deelnemers 2.342.
Aantal deelnemende scholen 217.
De cesuur is gelegd bij score 14 d.w.z. zij die 14 of meer punten behaalden zijn uitgenodigd voor de tweede ronde op 28 augustus a.s. Dit betreft 96 deelnemers.

Setvorming en wiskundeonderwijs

III Het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen; een onderzoek

S. P. VAN 'T RIET EN L. DE LEEUW[1])

1 Inleiding

In dit derde artikel over het onderwerp setvorming bespreken we een onderzoek dat we in het voorjaar van 1978 verricht hebben naar setvorming bij het oplossen van wiskundige vraagstukken met behulp van algoritmen. Van het totale onderzoek zullen we in deze artikelenserie slechts een gedeelte rapporteren. Het onderzoek is uitgevoerd met twee soorten vraagstukken, te weten het voortzetten van getallenrijen en het vermenigvuldigen van wortelgetallen. In deze aflevering zullen we de opzet van het onderzoek schetsen en de resultaten van het getallenrijengedeelte bespreken. In de volgende afleveringen bespreken we het wortelgetallengedeelte en trekken we enkele lijnen naar de behandeling van leerstof in de meest gebruikte wiskundemethoden in het voortgezet onderwijs.
Het onderzoek is uitgevoerd met de brugklasleerlingen van het Comenius College te Hilversum[2]) en geeft tevens een indruk hoe men met tamelijk eenvoudige middelen in de school onderzoek kan doen. Naast paragrafen over het begrip 'algoritme', de vraagstelling, de opzet en de resultaten van het onderzoek is daarom in de volgende aflevering ook een paragraaf opgenomen die gewijd is aan de inpassing van het onderzoek in het schoolgebeuren. Zo kan een indruk ontstaan hoe groot de belasting is die een dergelijk onderzoek voor de school met zich meebrengt.

2 Algoritmen

Alvorens de vraagstelling van het onderzoek te bespreken willen we even stil staan bij het begrip 'algoritme', dat een centrale rol speelt in het onderzoek. We zullen daarbij gebruik maken van een belangrijk onderscheid in doelen van het wiskundeonderwijs, zoals dat aangebracht is door Avital en Shettleworth (1968). In hun poging de taxonomie voor onderwijsdoelen van Bloom e.a. (1956) meer geschikt te maken voor het wiskundeonderwijs komen zij tot drie kategorieën van onderwijsdoelen: (1) Kennis; (2) Algoritmisch denken; (3) Open search. Onder kennis (knowledge) verstaan zij zowel herinnering (recall) als herkenning (recognition) van eerder geleerd materiaal. Voor ons

doel zijn echter vooral de kategorieën 2 en 3 van belang. We moeten daarbij bedenken dat de nagestreefde onderwijsdoelen worden geformuleerd in termen van leerlingengedrag. Zodoende geeft een taxonomie niet alleen een indeling van doelen (gesteld door de leraar), maar ook van leerbezigheden (uitgevoerd door de leerling). Een taxonomie kan dus tevens gezien worden als een klassifikatiesysteem voor leertaken. We zullen nu de kategorieën 2 en 3 toelichten met enkele voorbeelden.
In de onderbouw van het voortgezet onderwijs leren de leerlingen het berekenen van de koördinaten van het snijpunt van twee niet evenwijdige lijnen in het vlak. Hiervoor bestaan verschillende procedures of algoritmen. Een ervan is de substitutiemethode. Men begint meestal eenvoudig.
Opgave 1:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ 3x + 2 = -x + 6 \end{cases} \quad \text{enz.}$$

Gaandeweg maakt men de opgaven moeilijker, totdat er tenslotte een kompleet algoritme ontstaat.
Opgave 2: met $a_1 \neq 0$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1} \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1} \\ a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{enz.}$$

De vorm van algoritmisch denken of handelen die ontstaat als een leerling dergelijke oplossingsmethoden leert, wordt door Avital en Shettleworth (p. 6) omschreven als een denknivo waarop de leerling de beschikking heeft over welomschreven procedures of algoritmen ter oplossing van een bepaald type problemen. Men zou alle handelingen of operaties die verricht moeten worden netjes kunnen beschrijven in een soort handleiding bij dat type problemen. Houdt men zich aan het zo vastgelegde algoritme dan bestaat er oplossingsgarantie, d.w.z. men komt steeds tot de juiste oplossing. Geen enkele leerling zal nu bewust te werk gaan volgens zo'n 'handleiding'. De noodzakelijk te nemen stappen om tot een goede oplossing te komen worden als het ware door oefening ingeslepen en de leerling geeft op den duur de oplossing vrijwel automatisch.
Essentieel om met een algoritme te leren werken is dat de leerling weet te generaliseren van het ene probleem naar het andere. Dit generaliseren zal gemakkelijker zijn naarmate een volgend probleem minder van het voorgaande verschilt. Wie een leerling het algoritme uit opgave 2 wil leren, moet niet na opgave 1 meteen opgave 2 behandelen. Beter is een aantal tussenstappen te maken met opgaven die moeilijker zijn dan opgave 1 en makkelijker

dan opgave 2. Algoritmisch denken wordt gekompliceerder naarmate de nieuwe opgaven meer van de voorgaande verschillen. Wie problemen als opgave 2 heeft leren oplossen, zal niet een twee drie een probleem kunnen oplossen als Opgave 3:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+7}{4} = 2 \\ 3 \cdot \dfrac{x-6}{y} = -5 \end{cases}$$

Het herkennen van het probleem als een dat met het algoritme van opgave 2 is op te lossen, is hier een opgave op zich.
We zullen nu een algoritme definiëren met de woorden van Landa (1969): Een algoritme is een oplossingsproces dat bestaat uit een serie operaties en beslissingen die, mits op de juiste wijze doorlopen, oplossingsgarantie biedt.

3 Open search

Van geheel andere aard zijn de problemen die Avital en Shettleworth aanduiden met 'open search'. Bij deze problemen heeft de leerling geen rechttoerechtaan procedures ter beschikking om gegarandeerd tot de oplossing te komen. De leerling zal de gegevens van het probleem op nieuwe wijze moeten rangschikken, er een nieuwe formulering aan moeten geven of de tussen die gegevens bestaande relaties moeten onderzoeken. Er is een exploratiefase nodig waarin relevante aspekten van het materiaal moeten worden opgespoord.
Een voorbeeld van dit soort problemen vinden we in de kannenproblemen van Luchins. In het eerste artikel (Van 't Riet, 1979) zijn deze problemen besproken in verband met de E-test, een instrument om setvorming te onderzoeken. De situatie bij deze problemen is zo dat de leerling vier getallen A, B, C en D aangeboden krijgt, die inhouden van kannen voorstellen. Met behulp van de kannen A, B en C moet nu de inhoud van kan D uit een kontainer vloeistof worden afgemeten. Bij het eerste kannenprobleem dat de leerling voorgelegd krijgt (bijvoorbeeld $A = 18$, $B = 64$, $C = 6$ en $D = 34$), beschikt hij niet over een oplossingsprocedure of algoritme. Hij moet maar eens wat proberen met de getallen A, B en C in de hoop dichter bij het getal D te komen. Zo kan hij $B - A$ uitrekenen of $A + 2C$. De oorspronkelijke gegevens, die louter getallen behelzen, worden zo als het ware opnieuw geformuleerd in termen van relaties die ertussen bestaan. Wellicht brengt deze explorerende aktiviteit de leerling dichter bij de oplossing, maar zeker is dit allerminst, daar dergelijke exploraties ook irrelevante gegevens kunnen opleveren. Er is dus geen aanpak met oplossingsgarantie voor deze problemen.
Bij de E-test is het nu zo dat de eerste vijf opgaven alle dezelfde oplossingsregel hebben ($B - A - 2C = D$). Gaandeweg gaat deze regel, de setregel, als een soort algoritme dienen. Voor de kannenproblemen in het algemeen is deze setregel echter een quasi-algoritme. Zodra er een kannenprobleem ver-

schijnt dat niet met de setregel is op te lossen falen vele leerlingen, omdat het 'algoritme' hen in de steek laat. De set verhindert een adekwaat funktioneren van de leerling zodra de kannenproblemen hun open-search karakter terugkrijgen.
Avital en Shettleworth merken op dat het nivo van de denkaktiviteiten die te pas komen aan open-search problemen psychologisch het minst goed beschreven en begrepen is. Alleen al daarom is het moeilijk een definitie van open search te geven. Eén belangrijk kenmerk is echter wel duidelijk geworden: het ontbreken van een algoritme met de bijbehorende oplossingsgarantie.

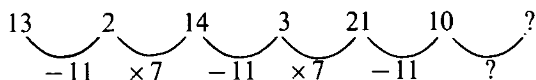
4 De eerste vraagstelling: Setvorming bij algoritmisch denken

In de voorgaande artikelen (Van 't Riet, 1979 en 1980) werd de E-test van Luchins besproken en een aantal onderzoekingen die daarmee zijn verricht. Tevens werd opgemerkt dat de kannenproblemen het enige soort aritmetische problemen is waarmee setvorming is onderzocht. In termen van beide vorige paragrafen betekent dit dat het onderzoek dat in het verleden verricht is, zich beperkt heeft tot *open-search* problemen. Het is echter een belangrijke vraag of setvorming ook een rol speelt bij taken die vallen onder het *algoritmische denken*. Hier ligt dus de eerste vraagstelling van ons onderzoek. Er zullen opgaven gevonden moeten worden die met behulp van algoritmen zijn op te lossen en waarmee setvorming onderzocht kan worden op overeenkomstige wijze als met de E-test. In paragraaf 5 zullen we deze problemen introduceren.

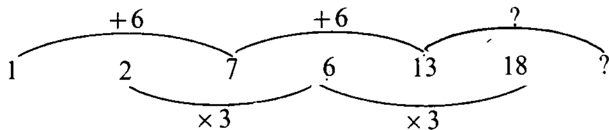
5 De gebruikte problemen

Wil men op grond van vraagstelling 1 setvorming bij algoritmisch op te lossen problemen onderzoeken op een overeenkomstige wijze als men dit bij open-search problemen doet met de E-test, dan moeten de gebruikte problemen aan drie eisen voldoen: (1) Er moeten setproblemen gemaakt kunnen worden, d.w.z. opgaven die alleen zijn op te lossen met een gekompliceerd setalgoritme; (2) Er moeten extinktieproblemen te maken zijn met dezelfde gedaante als de setproblemen, die echter alleen met een aanzienlijk eenvoudiger extinktie-algoritme zijn op te lossen; (3) Er moeten kritische problemen gemaakt kunnen worden die zowel met het setalgoritme als met het extinktiealgoritme zijn op te lossen.
Een type problemen dat hiervoor in aanmerking komt, was reeds bij de aanvang van het onderzoek voorhanden. De Leeuw (1979) gebruikte in zijn onderzoek naar de effekten van het aanleren van algoritmische en heuristische probleemoplossingsmethoden o.a. opgaven in het voortzetten van getallenrijen. Ook om onderzoeksvraagstellingen die buiten het bestek van dit artikel liggen, lag het voor de hand van deze problemen gebruik te maken. Zo sluit het onderzoek aan bij een breder skala van onderzoekingen, waardoor de relevantie ervan toeneemt.
Deze getallenrijproblemen voldoen zeer goed aan de drie bovenstaande eisen.

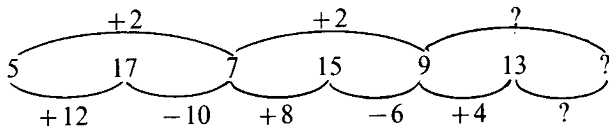
De *setproblemen* laten zich illustreren door
Opgave 1:



Het komt er op neer dat de rekenkundige relaties tussen de opvolgende termen van de rij onderzocht moeten worden met behulp van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Uitdrukkelijk wordt gesteld dat men werkt binnen de verzameling van de natuurlijke getallen. Elke relatie wordt onder het getallenpaar genoteerd met het teken der toegepaste bewerking en het bijbehorende natuurlijke getal. Zo ontstaat onder de oorspronkelijke rij een nieuwe 'rij' met een gemakkelijk herkenbaar patroon. Hiermee is de volgende term van de rij te berekenen. Ook andere patronen van relaties zijn mogelijk, zoals bijvoorbeeld +1, ×2, +3, ×4, +5, ×6. Dit algoritme laat slechts daar enige onzekerheid waar zowel optellen als vermenigvuldigen of zowel aftrekken als delen mogelijk is. Wijst men de leerlingen er op steeds met beide mogelijkheden rekening te houden, dan levert dit in de praktijk nauwelijks moeilijkheden op.
De *extinktieproblemen* laten zich als volgt illustreren:
Opgave 2:



Hier worden dus de rekenkundige relaties tussen opvolgende termen met even, resp. oneven rangnummer onderzocht. Deze leveren twee afzonderlijke patronen op, die echter onderling konstant zijn. Men kan hier spreken van 'overspringen'. De oorspronkelijke rij is voort te zetten op grond van de relatie tussen de termen van de oneven subrij. Zo is het duidelijk dat het bij de extinktieproblemen om een veel eenvoudiger algoritme gaat dan bij de setproblemen. Daarnaast zijn er nog *kritische problemen* die zowel met het set- als met het extinktiealgoritme zijn op te lossen.
Opgave 3:



6 De tweede vraagstelling: De aard van de leerstofaanbieding

Nu de problemen waarmee het onderzoek uitgevoerd kan worden bekend zijn, kunnen we gaan denken aan de opzet van een soort 'E-test'. We zullen de proef-

personen (leerlingen) eerst een serie setproblemen moeten voorleggen, vervolgens een aantal kritische problemen en extinktieproblemen. *We moeten er dan wel zeker van zijn dat de proefpersonen in staat zijn die kritische problemen en die extinktieproblemen met behulp van het extinktiealgoritme te maken.* Voordat ze de setproblemen oplossen, moeten ze dus in ieder geval het extinktiealgoritme geleerd hebben. Dit betekent dat aan het eigenlijke experiment met de nieuwe E-test *een leerfase moet voorafgaan,* waarin de algoritmen geleerd en geoefend worden. Hierbij duikt een interessante vraag op. Is het mogelijk door middel van verschillende typen leerstofaanbieding de setvorming op de later te houden E-test te beïnvloeden? En welke *variaties in de leerstofaanbieding* kunnen hier van belang zijn?
Bedenken we dat bij het werken met slechts twee algoritmen (set- en extinktiealgoritme) het seteffekt hierin bestaat dat de proefpersoon vasthoudt aan één algoritme en niet op tijd de omschakeling naar het andere algoritme weet te maken, dan kan men zich afvragen of het mogelijk is door middel van een bepaald soort leerstofaanbieding de proefpersonen te leren deze omschakeling eerder te maken. Het ligt voor de hand dit na te streven door in de fase waarin de algoritmen geleerd worden de leerlingen te noodzaken regelmatig van het ene algoritme naar het andere over te stappen. We moeten dus in het onderzoek twee typen leerstofaanbieding opnemen: (1) Een waarbij eerst 'en bloc' het setalgoritme geleerd wordt en vervolgens 'en bloc' het extinktiealgoritme (2) Een waarbij het set- en extinktiealgoritme afwisselend worden uitgelegd en geoefend. We zullen het eerste type leerstofaanbieding BLOK-instruktie noemen, het tweede type MIXED-instruktie. In fig. 1 is schematisch weergegeven hoe beide instrukties zijn opgebouwd. Zorgvuldig moet erop gelet worden dat in beide kondities de beide algoritmen in gelijke mate aan bod komen.
De veronderstelling die we nu doen is, dat bij de MIXED-instruktie de proefpersonen het switchen van het ene naar het andere algoritme zullen leren, hetgeen op de daarna te houden E-test zal leiden tot een geringer seteffekt. Dit is de tweede vraagstelling van het onderzoek.

7 De opzet van het onderzoek

Het onderzoek voor zo ver het betrekking heeft op de hierboven behandelde vraagstellingen zal, zoals in paragraaf 6 duidelijk is geworden, moeten bestaan uit twee fasen: (1) Een leerfase waarin de algoritmen worden geleerd (2) Een fase van setvorming, waarin een soort E-test wordt afgenomen. Na enige kleine vooronderzoekjes op leerlingen van tweede klassen werd voor de uiteindelijke proefgroep van brugklassers de volgende opzet voor het onderzoek gerealiseerd.

7.1 De leerfase

In de leerfase moesten de proefpersonen de algoritmen leren met behulp van instruktieboekjes die ze geheel zelfstandig, eventueel met enige hulp van de proefleider, in ongeveer 25 minuten konden doornemen. Er werden

BLOK	MIXED
1 instruktie	1 instruktie
3 inleiding	3 inleiding
5 a/o setalg	5 a/o setalg
7 a/o setalg	7 a/o extalg
9 a/o setalg	9 a/o setalg
11 a/o setalg	11 a/o extalg
13 oef setalg	13 a/o setalg
13 oef setalg	15 a/o extalg
13 oef setalg	17 a/o setalg
15 a/o extalg	19 a/o extalg
17 a/o extalg	21 oef setalg
19 a/o extalg	21 oef extalg
21 a/o extalg	21 oef setalg
23 oef extalg	23 oef extalg
23 oef extalg	23 oef setalg
23 oef extalg	23 oef extalg

Figuur 1 De opbouw van de boekjes met de BLOK- en MIXED-instruktie voor het leren van het voortzetten van getallenrijen. Links zijn de paginanummers vermeld. a/o = aanwijzing/opdracht; oef = oefening; setalg = setalgoritme; extalg = extinktiealgoritme. Pag. 1 instruktie behelst enkele aanwijzingen voor het doornemen van het boekje.

twee typen boekjes gebruikt: (1) BLOK-getallenrijenboekjes; (2) MIXED-getallenrijenboekjes. Elk boekje bestond uit 24 pagina's. Op de oneven pagina's stonden de aanwijzingen en de opdrachten. De daarop volgende even pagina's gaven de antwoorden en extra opdrachten indien er een fout gemaakt was. Elke aanwijzing eindigde met een opdracht waarbij de leerling kon laten zien of hij de aanwijzing begrepen had. Het totale aantal opdrachten bij een foutloos 'parcours' was 15. Bij de BLOK-getallenrijenboekjes waren deze opdrachten als volgt verdeeld: één inleidende opdracht, zeven opdrachten voor het setalgoritme en zeven voor het extinktiealgoritme. In de MIXED-boekjes werd de afwisseling der beide algoritmen direkt vanaf hun introduktie doorgevoerd, waarbij telkens elke volgende opdracht het andere algoritme betrof. Bovendien waren de gebruikte opdrachten in de BLOK- en de MIXED-boekjes gelijk en verschilde alleen de volgorde waarin zij aan de proefpersonen werden aangeboden. De proefpersonen konden nu de boekjes in hun eigen

tempo doornemen en indien nodig de proefleider om hulp vragen. De uitvoering van deze leerfase verliep zonder enig probleem.

7.2 De E-test met getallenrijproblemen

Voor de onderzoeksfase der setvorming moest nu vervolgens een E-test ontworpen worden bestaande uit getallenrijproblemen. De keuze van deze problemen hebben we in paragraaf 5 behandeld. Uit de resultaten van de vooronderzoekjes bleek dat een redelijk grote, maar niet te grote setvorming zou kunnen optreden als met tien setproblemen werd gewerkt. Wegens andere, hier niet behandelde vraagstellingen van het onderzoek bleek het tevens het beste te zijn na de setproblemen vier kritische problemen op te nemen en daarna nog eens vier extinktieproblemen. In fig. 2 is de zo opgebouwde E-test schematisch weergegeven. De uitslag van deze E-test zal nu bestaan uit twee scores, te weten een *kritische score* en een *extinktiescore*, beide in een range van 0 tot en met 4. Hierbij is alleen van belang of de proefpersoon het set- of het extinktiealgoritme gebruikt heeft. Een kritische score 3 wil dus zeggen dat de proefpersoon drie kritische problemen heeft opgelost met het setalgoritme. De kritische score is nu een *maat voor de Einstellung*, zoals we die in het eerste artikel (Van 't Riet, 1979) gedefinieerd hebben. Een kritische score 0 wil zeggen dat de proefpersoon geen Einstellung vertoont. Een kritische score 4 wil zeggen: maximale Einstellung.
Met de extinktiescore is de situatie iets anders. Een extinktiescore 2 wil zeggen dat de proefpersoon twee extinctieproblemen *niet* heeft kunnen oplossen, naar we aannemen onder invloed van het werken met het setalgoritme. De extinktieproblemen zijn zoals men weet uitsluitend met het extinktiealgoritme op te lossen. De extinktiescore wordt op deze wijze een *maat voor de rigiditeit*, zoals we die eveneens in het eerste artikel gedefinieerd hebben. Een extinktiescore 0 wil dus zeggen dat de proefpersoon geen rigiditeit vertoont, terwijl een extinktiescore 4 wil zeggen: maximale rigiditeit.
Twee komplikaties moeten nu nog vermeld worden. De eerste heeft te maken met de totstandkoming van de scores. Daar de scores bepaald worden door het al of niet gebruiken van een van beide algoritmen, zullen deze scores in hoge mate onbetrouwbaar worden als de proefpersonen tijdens het maken van de kritische problemen en de extinktieproblemen kunnen terugbladeren om reeds gegeven oplossingen te verbeteren of te veranderen. Daarom is een E-testboekje ontworpen met op elke oneven pagina een opgave. De proefpersonen krijgen voor elke opgave één minuut de tijd en moeten op aanwijzing van de proefleider allemaal tegelijk omslaan naar de volgende opgave. Terugbladeren is gedurende de gehele E-test verboden.
In de tweede plaats moet het de proefpersonen duidelijk zijn dat indien mogelijk de opgave moet worden opgelost met het eenvoudigste algoritme. Anders kunnen de proefpersonen de indruk hebben dat het de bedoeling van de proefleider is dat steeds hetzelfde algoritme gebruikt wordt. Ook mogelijk is dat ze in dat geval uitsluitend hun eigen voorkeur voor een bepaald algoritme gaan volgen. De instrukties voorafgaand aan de E-test moesten dan ook de proef-

E-test voor de E-groepen	taken voor de C-groepen
10 setproblemen met getallenrijen brengen een set aan op het setalgoritme van de getallenrijen.	10 controleproblemen met gestruktureerde vijftallen brengen geen set aan op het setalgoritme van de getallenrijen.
4 kritische problemen meten het gebruik van het setalgoritme (Einstellung).	4 kritische problemen meten het gebruik van het setalgoritme van de getallenrijen.
4 extinktieproblemen meten het falen m.b.t. het extinktiealgoritme (rigiditeit).	4 extinktieproblemen meten het falen m.b.t. het extinktiealgoritme van de getallenrijen.

Figuur 2 Schematische opbouw van de in het onderzoek gebruikte E-test en de taken voor de controlegroepen. Deze worden gelijktijdig afgenomen twee dagen na de leerstofaanbieding.

persoon uitdrukkelijk op het hart binden van de twee geleerde algoritmen als het zou kunnen steeds de gemakkelijkste te gebruiken. Dit meest gemakkelijk zijn werd de leerlingen verteld in termen van de manier die het minste rekenwerk vergde. Dit bleek in geen enkel geval tot misverstanden aanleiding te geven.

De zo ontworpen E-test werd ongeveer 48 uur na de instruktiefase afgenomen.

7.3 Controlegroepen

Op grond van bovenstaande hebben we voor ons onderzoek in ieder geval twee groepen nodig: Een die een BLOK-leerstofaanbieding krijgt en twee dagen later de E-test (groep GBE) en een die een MIXED-leerstofaanbieding krijgt en eveneens twee dagen daarna de E-test (groep GME). Op deze wijze kunnen we de tweede vraagstelling van het onderzoek evalueren. Er doet zich nu het volgende probleem voor.

In onze definitie van Einstellung (voor rigiditeit geldt m.m. hetzelfde) zijn twee uitdrukkelijke voorwaarden opgenomen (zie Van 't Riet, 1979). Er is pas sprake van Einstellung als (1) de proefpersonen na het maken van de setproblemen het setalgoritme blijven gebruiken bij het maken van de kritische problemen;

(2) de proefpersonen zonder het maken van de setproblemen direkt het extinktiealgoritme zullen gebruiken bij het maken van de kritische problemen. Deze tweede voorwaarde zegt in feite: Het gebruiken van het setalgoritme op de kritische problemen na het maken van de setproblemen wordt uitsluitend en alleen veroorzaakt door dit maken van de setproblemen en niet door iets anders (zoals b.v. een slechte leerstofaanbieding, sneller vergeten van het extinktiealgoritme of een te gering verschil in efficiëntie tussen set- en extinktiealgoritme). Om nu na te kunnen gaan in hoeverre de resultaten van het onderzoek aan die tweede voorwaarde voldoen, moeten we ook groepen opnemen die wel de kritische problemen en de extinktieproblemen maken, maar niet daaraan voorafgaand de tien setproblemen. Deze groepen maken dus van de E-test alleen de laatste acht problemen. We noemen deze groepen 'controlegroepen' en nemen er eveneens twee in het onderzoek op: Een die de BLOK-leerstofaanbieding krijgt en twee dagen later geen setproblemen, maar wel kritische en extinktieproblemen (groep GBC) en een die de MIXED-leerstofaanbieding krijgt en eveneens twee dagen later geen setproblemen, maar wel kritische problemen en extinktieproblemen (groep GMC). Als nu in de E-groepen signifikant hogere kritische scores en extinktiescores voorkomen dan in de C-groepen, dan kunnen we dit met recht wijten aan het maken van de setproblemen en mogen we van Einstellung en rigiditeit spreken. Hiermee is de opzet van het onderzoek ook geschikt geworden voor het evalueren van de eerste vraagstelling.

(Omdat alle proefpersonen op dezelfde wijze aan het onderzoek mee moesten doen, moesten de controleproefpersonen 'beziggehouden' worden, terwijl de E-testgroepen de tien setproblemen maakten. De controleproefpersonen kregen daarom in die tijd z.g. gestruktureerde vijftallen op te lossen, opdrachten die eenzelfde type rekenwerk vereisen als de setproblemen van de getallenrijen, maar verder geen enkele konnektie vertonen met het voortzetten van getallenrijen. In enigszins gewijzigde lay-out kwamen deze problemen neer op het vinden van de juiste hoofdbewerkingen om b.v. de uitdrukking (12 .. 3) .. (10 .. 8) = 2 kloppend te maken. In fig. 2 zijn de taken van de controlegroepen weergegeven, die zij maken terwijl de E-testgroepen de E-test maken.)

7.4 De indeling van de proefpersonen in vier kondities

In fig. 3 zijn de vier kondities van het onderzoek zoals het hierboven beschreven is, weergegeven en is het verband met de beide vraagstellingen uitgebeeld. Elke konditie hebben we gekodeerd met behulp van letters. De G staat voor getallenrijen, de B voor leerstofaanbieding BLOK, de M voor leerstofaanbieding MIXED, de E voor groepen die de E-test maken en C voor controlegroepen. Met GBE is dus de groep proefpersonen bedoeld die getallenrijen krijgen voort te zetten in de leerstofaanbieding BLOK en twee dagen later de E-test moeten afleggen. Op het eerste gezicht is de kodering G hier overbodig. In het volgende artikel echter zullen we een tweede gedeelte van het onderzoek bespreken, dat niet werd uitgevoerd met getallenrijen, maar met vermenigvuldiging van wortelgetallen. Dit gedeelte van het onderzoek had precies de-

zelfde opzet als het gedeelte met de getallenrijen. In plaats van vier kondities was er in het onderzoek dus sprake van twee maal vier kondities. De proefpersonen moesten dus in feite over acht kondities verdeeld worden.

	Getallenrijen			
Vraagstelling 2: Leerstofaanbieding	BLOK		MIXED	
Vraagstelling 1: Setvorming	E-test	C-taken	E-test	C-taken
Kodering van de vier kondities	GBE	GBC	GME	GMC
Aantal proefpersonen per groep	26	27	27	26

Figuur 3 De twee vraagstellingen van het onderzoek en de vier bijbehorende kondities (groepen proefpersonen). Ook vermeld is het aantal proefpersonen dat per konditie bij het onderzoek betrokken was en de voor elke konditie gebruikte kodering.

Een groep van bijna 240 leerlingen van de brugklas kwam in aanmerking om aan het onderzoek mee te doen. Deze groep moest nu over de acht kondities verdeeld worden op zodanige wijze dat er acht groepen van min of meer gelijke samenstelling zouden ontstaan. Er deed zich nu een moeilijkheid voor. In het vooronderzoek was gebleken dat afkijken bij de linker of rechter buur erg gemakkelijk was. Het gebruik van grote bogen bovenlangs de rij of kleine bogen onderlangs gaf een direkte indikatie voor het gebruikte algoritme bij de getallenrijproblemen. Dit zou een te grote invloed op de kritische scores en de extinktiescores kunnen hebben. Daar het onderzoek werd uitgevoerd in de gebruikelijke klassesituatie, werd daarom besloten de leerlingen die rechts zaten getallenrijen te geven en leerlingen die links zaten wortels. Daarmee was afkijken vrijwel uitgesloten.
Voorts moest er in verband met andere vraagstellingen voor gezorgd worden dat alle groepen proefpersonen een gelijk aantal jongens en meisjes bevatten. Tenslotte kon bij de verdeling van de leerlingen over de acht kondities gebruik gemaakt worden van DAT-intelligentiescores die aan het begin van het schooljaar door de school verkregen werden[3]). Op grond van de overweging dat schoolprestaties in de algebra op brugklas- en 2VWO-nivo het best gepredi-ceerd worden door de DAT-subtests Analogiën en Rekenvaardigheid (zie Dirkzwager, 1966, p. 163) werd de som van de stanines op deze subtest gebruikt om twee maal vier groepen van min of meer gelijke samenstelling te verkrijgen.
Elke leerling deed binnen het verband van zijn eigen klas aan het onderzoek mee. Ieder kreeg de boekjes van zijn eigen konditie uitgereikt en werkte die zelfstandig door. Na afloop van elke zitting werden de gebruikte boekjes ingenomen. Twee leerlingen moesten uit het onderzoek verwijderd worden wegens antwoorden waaruit niet was op te maken welke algoritmen zij ge-

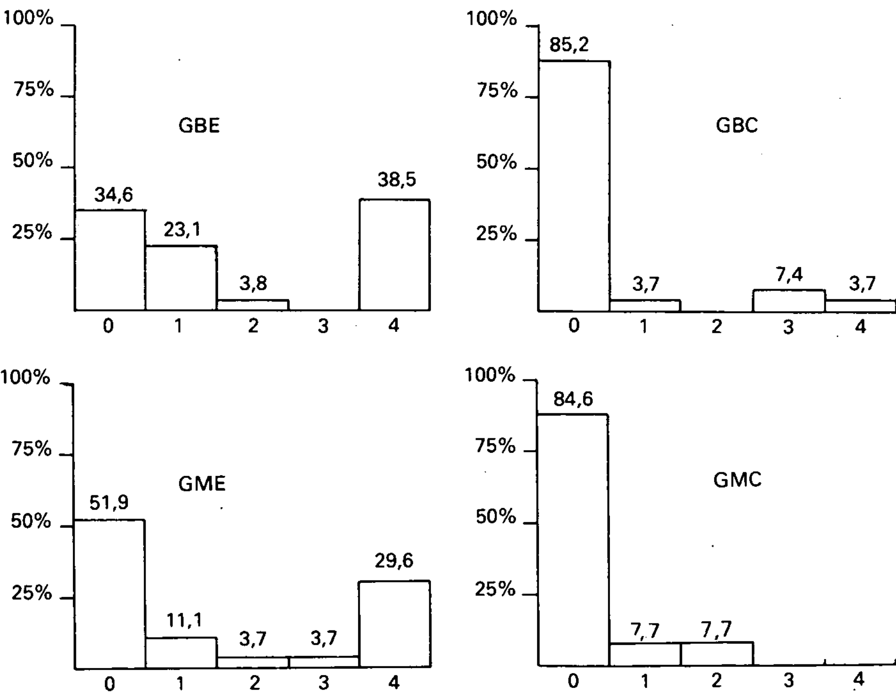
bruikt hadden. Mede hierdoor en door ziekte van leerlingen en doordat een aantal leerlingen voortijdig de school had verlaten zonder dat de proefleider hiervan op de hoogte was, variëerde de aantallen leerlingen in de acht kondities van 26 tot 30. Voor de preciese aantallen verwijzen we naar fig. 3.

8 Resultaten en diskussie

We zullen de resultaten van het onderzoek voor het geval van de Einstellung en dat van de rigiditeit apart bespreken.

8.1 Einstellung bij getallenrijen

In fig. 4 zijn de histogrammen afgebeeld van de scores op de kritische problemen in de getallenrijengroepen GBE, GBC, GME en GMC. We zien dat de E-groepen, die wel setproblemen kregen op te lossen, in aanzienlijke mate hoge kritische scores vertonen. Dit in tegenstelling tot de controlegroepen die geen setproblemen hebben opgelost. Deze verschillen tussen GBE en GBC enerzijds en GME en GMC anderzijds zijn signifikant met de verdelingsvrije toets van Wilcoxon voor twee aselekte steekproeven, eenzijdig getoetst met een



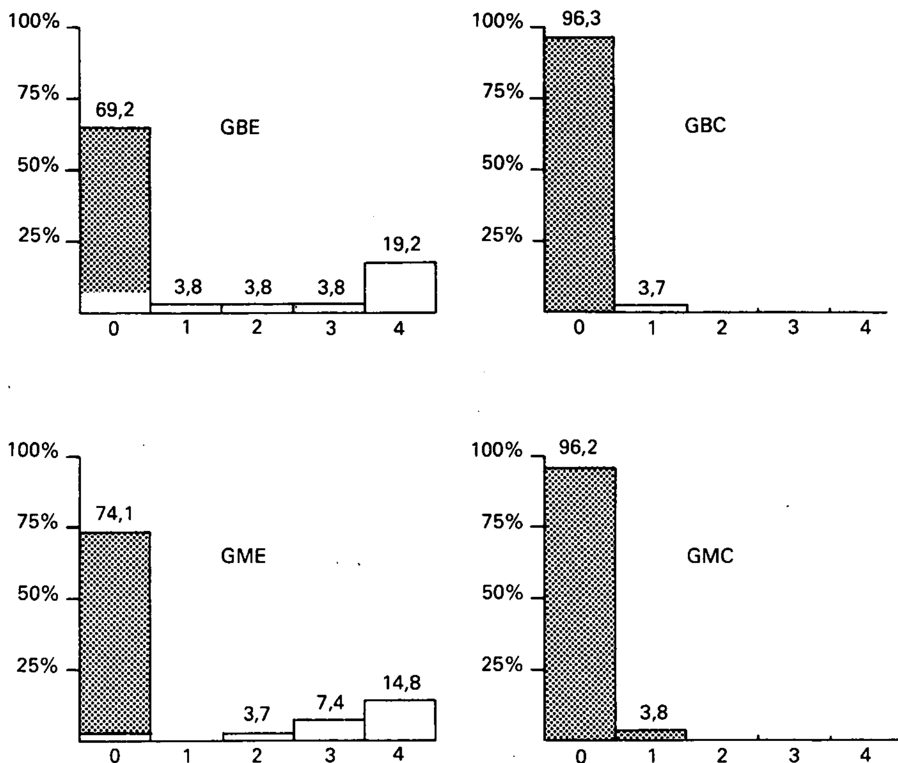
Figuur 4 Histogrammen van de kritische score (*Einstellung*) in percentages proefpersonen voor de vier getallenrijengroepen.

onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = .05$ (zie De Jonge en Wielenga, 1969, p. 248). We zullen deze toets in het vervolg kortweg aanduiden met 'Wilcoxon', eventueel met vermelding van andere waarden van α. In het onderhavige geval konkluderen we dat in zowel de BLOK- als de MIXED-konditie er sprake is van Einstellung: Het werken met het setalgoritme op de setproblemen verhindert vele proefpersonen bij de kritische problemen over te stappen op het extinktiealgoritme. Daarmee is de eerste vraagstelling van het onderzoek positief beantwoord. Ook bij algoritmisch denken treden verschijnselen van setvorming op en de mate waarin zij optreden is groot genoeg om verder onderzoek te rechtvaardigen.
Vergelijken we nu de twee soorten leerstofaanbieding dan zien we dat er bij de BLOK-leerstofaanbieding iets meer Einstellung optreedt dan bij de MIXED-leerstofaanbieding. Het verschil is echter niet signifikant, maar ligt wel in de verwachte richting. Immers in paragraaf 6 is de verwachting uitgesproken dat de proefpersonen bij de MIXED-leerstofaanbieding het switchen van het ene naar het andere algoritme zouden leren, hetgeen minder setvorming tot gevolg zou hebben. Omdat het gekonstateerde verschil niet signifikant is, mogen we de bij de tweede vraagstelling gedane veronderstelling niet bevestigd achten.
Samenvattend kunnen we stellen dat er bij algoritmische problemen als het voortzetten van getallenrijen een aanzienlijk seteffekt in de vorm van Einstellung mogelijk is. Er is vooralsnog geen reden om aan te nemen dat dit effekt door een MIXED-leerstofaanbieding in de leerfase effektief kan worden tegengegaan, hoewel daarmee een geringe verbetering te bespeuren valt.

8.2 Rigiditeit bij getallenrijen

Rigiditeit wordt zoals we in paragraaf 7.2 zagen, gemeten door de score op de extinktieproblemen. In fig. 5 zijn de histogrammen afgebeeld voor de getallenrijengroepen. In de kolommen boven de score 0 is gearceerd aangegeven het percentage proefpersonen dat op het vierde kritische probleem de set al overwonnen had. Het niet gearceerde gedeelte van de kolommen geeft dus de scores van de proefpersonen met kritische score 4. We zien duidelijk dat er in de E-testgroepen wel hoge extinktiescores optreden, in de controlegroepen niet. 'Wilcoxon' (zie paragraaf 8.1) levert echter geen signifikante verschillen op tussen de groepen GBE en GBC en tussen de groepen GME en GMC. In de afzonderlijke groepen GBE en GME is dus geen sprake van een signifikante rigiditeit. Voegen we deze twee groepen echter samen ($GBE \cup GME = GE$) evenals de twee controlegroepen ($GBC \cup GMC = GC$) dan vinden we in de totale E-testgroep GE bij eenzijdig toetsen met $\alpha = .05$ wel een signifikant hogere extinktiescore dan in de controlegroep GC. Hieruit blijkt dat we wel met enig recht mogen spreken over rigiditeit ten gevolge van het veelvuldig werken met het setalgoritme, ofschoon het om een effekt van geringe omvang gaat, dat pas bij grotere groepen proefpersonen van belang wordt. Het is voorts uit fig. 5 duidelijk dat het verschil in leerstofaanbieding (BLOK versus MIXED) het optreden van deze rigiditeit niet wezenlijk beïnvloedt.
Samenvattend kunnen we stellen dat er bij algoritmische problemen zoals het

voortzetten van getallenrijen slechts een gering seteffekt in de vorm van rigiditeit optreedt. Een MIXED-leerstofaanbieding levert geen bijdrage ter voorkoming van deze rigiditeit.



Figuur 5 Histogrammen van de extinktiescore (*rigiditeit*) in percentages proefpersonen voor de vier getallenrijengroepen. Het gearceerde gedeelte geeft het percentage proefpersonen aan, dat op de kritische problemen reeds de set doorbroken had.

8.3 Diskussie

De resultaten van het onderzoek tot dusver zijn niet opzienbarend. Dat setvorming kan optreden bij algoritmisch denken is geheel in overeenstemming met de verwachting. Elke ervaren leraar in de wiskunde zal regelmatig setachtige verschijnselen konstateren als hij zijn leerlingen een vraagstuk ziet oplossen. Echter het aantonen van setvorming in een experimentele situatie maakt dat het verschijnsel onder de kontrole van wetenschappelijk onderzoek te brengen is. Hierdoor wordt het mogelijk setvorming vanuit allerlei verschillende vraagstellingen en invalshoeken te onderzoeken. Dit onderzoek kan dan vervolgens weer resultaten opleveren die voor het onderwijs van belang kunnen zijn.

Wat de vraagstelling van de leerstofaanbieding betreft moeten we echter stellen dat het gebruik van een MIXED-leerstofaanbieding in het geval van het voort-

zetten van getallenrijen slechts in geringe mate de setvorming tegengaat. Het effekt is te klein om er konsekwenties voor het onderwijs aan te verbinden. We zullen evenwel in het volgende artikel zien dat dit resultaat in hoge mate afhankelijk is van de *keuze van de leerstof.* Bij minder gekompliceerde problemen zoals het vermenigvuldigen van wortelgetallen worden geheel andere resultaten verkregen. Wat de getallenrijen aangaat zal er gezocht moeten worden naar andere vormen van leerstofaanbieding ter voorkoming van setvorming, verondersteld dat voorkoming mogelijk is. Hiertoe bestaan er momenteel een aantal nog weinig omlijnde ideeën, die we in verder onderzoek hopen uit te werken.

Zoals reeds vermeld zullen we in een volgend artikel het 'tweede deel' van het onderzoek bespreken, dat andere resultaten te zien gaf.

Noten

1 Dr. L. de Leeuw is wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de subfakulteit Psychologie van de Vije Universiteit te Amsterdam en heeft het onderzoek waarvan in dit artikel een gedeeltelijk verslag wordt gedaan in alle fasen intensief begeleid.

2 Bij deze zeggen wij dank aan leiding en kollega's van het Comenius College te Hilversum en met name aan de konrektrix mevrouw H. J. Dengerink voor de bereidwillige medewerking bij het uitvoeren van het onderzoek.

3 Hierbij danken we Drs. W. W. Pott van de Stichting School- en Beroepskeuze te Hilversum voor zijn medewerking met betrekking tot het onderzoeksmateriaal.

Literatuur

Avital, S. M., Shettleworth, S. J., *Objectives for mathematics learning, Bulletin 3,* Ontario Institute for Studies in Education, Ontario, 1968.

Bloom, B. S., e.a., *Taxonomy of educational objectives, Handbook I: Cognitive domain,* Longman, Green and Co, New York, 1956.

Dirkzwager, A., *Intelligentie en schoolprestaties,* Swets en Zeitlinger, 1966.

Jonge, H. de, Wielenga, G., *Statistische methoden voor psychologen en sociologen,* 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

Landa, L. N., *Algorithmierung im Unterricht,* Volk und Wissen, Berlijn, 1969.

Leeuw, L. de, *Leren probleemoplossen,* Swets en Zeitlinger, Lisse, 1979.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken,* Euclides 1979, 55, p. 41-49.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, II De aard van de leerervaring,* Euclides 1980, 55, p. 308-316.

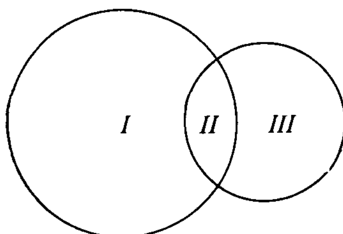
Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin. Dillenburg 148, 6865 NN Doorwerth.

Opgaven

421. *A* **noemt een van de getallen 0, 1, 2, ..., 100.** *B* **daarna een ander van deze getallen en** *C* **ten-**slotte weer een ander. Ieder kent dus de getallen die door zijn voorganger(s) genoemd zijn. Daarna wordt aselect een van de getallen 0, 1, 2, ..., 100 gekozen door een machine. Wiens getal daar het dichtste bij ligt, heeft gewonnen. Zijn twee er even dicht bij, dan beslist het lot.
We nemen aan dat alle drie volgens optimaal gunstige strategie kiezen en dat, indien twee of meer mogelijkheden even gunstig zijn, het lot beslist.
Welk getal kiest *A*?

422. In onderstaande figuur zijn twee snijdende cirkels getekend.
Gevraagd een cirkel te tekenen die de drie vlakdelen I, II en III halveert. (meegedeeld door R. Troelstra)



Oplossingen

419. Als in $\overline{aba}$ geldt $a + b = 7$, dan is $\overline{aba}$ deelbaar door 7. Want: de rest van 1 bij deling door 7 is 1, de rest van 10 is 3 en de rest van 100 is 2. De rest van *aba* bij deling door 7 is dus $2a + 3b + a = 3(a + b)$. Omdat $a + b$ deelbaar door 7 is, is $\overline{aba}$ het dus ook.
Oorzaak is blijkbaar, dat de rest van 100 bij deling door 7 gelijk is aan 1 minder dan de rest van 10.
Anders gezegd: de oorzaak is, dat 91 deelbaar is door 7.
Omdat 91 ook deelbaar door 13 is, geldt ook: $a + b = 13 \Rightarrow \overline{aba}$ **is deelbaar door 13.**
Nu proberen met vijf cijfers.
als in $\overline{abcab}$ geldt $\overline{ab} + c = x$, dan is $\overline{abcab}$ deelbaar door x.
Voor welke x is dit juist?
Voorwaarde is, dat de rest van 1000 bij deling door x gelijk is aan 1 minder dan de rest van 100 bij deling door x. Anders gezegd: voorwaarde is dat 901 deelbaar is door x. Nu is $901 = 17 \cdot 53$.
Het is dus juist voor $x = 17$ en voor $x = 53$.
Zo is 13413 deelbaar door 17 en 48548 door 53.

420. Voor het bijbehorende verhaal zie het vorige nummer.
Het aantal personenauto's met twee cijfers, twee letters, twee cijfers, waarvan de eerste letter een V is, bedraagt 190000 (op 19 na). Dit is 8% van het totaal aantal personenauto's. Zeven jaar geleden was 190000 slechts 6% van het totaal aantal personenauto's. Toen waren er dus meer personenauto's dan nu.

Boekbesprekingen

M. Doesburg, *wiskunde-bouw*, Educaboek.

Veel opdrachten in dit boek gaan over problemen uit de woningbouwsector. Om de problemen op te kunnen lossen moeten de leerlingen bekend zijn met een aantal vaktermen uit die sector. De opdrachten in dit boek hebben als doel de leerlingen rekenvaardigheden te leren; zo staan in elk hoofdstuk de hoofdbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en een enkele keer worteltrekken centraal.
Het is niet de bedoeling van de auteur om de leerlingen te laten kiezen uit alternatieve oplossingstechnieken, maar wel duidelijk de bedoeling om de leerlingen regels te laten toepassen, die leiden tot een eenduidig antwoord.
Aan de verschillende rekentechnieken, wel steeds volgens bepaalde regels, wordt in dit boek veel gedaan. (Men moet echter oppassen voor wiskundige onjuistheden zoals die voorkomen op o.a. blz. 129, 3 appels + 5 peren = 3 appels + 5 peren en 3a + 5b = 3a + 5b.)
Misschien komt dit boek wel tegemoet aan de wens van een groot aantal vakleraren uit de bouwkunde sector, die het vaak te kwaad hebben met 'de rekenvaardigheid' van de leerlingen, maar of het de leerlingen werkelijk verder helpt in het leerproces en of deze aanpak de leerlingen motiveert en brengt tot inzicht is voor mij een grote vraag.
Het boek wordt besloten met een lijst van rekenregels en de daarbij behorende rekentechnieken. 1 optellen, 2 aftrekken, 3 vermenigvuldigen, 4 delen, 5 afronden van decimalen, 6 breuken, 7 machtsverheffen, 8 worteltrekken, 9 volgorde van bewerkingen, 10 cirkels en hoeken, 11 maten, 12 omtrek en oppervlakte van enige figuren, 13 eigenschappen van vierhoeken, 14 inhoud en oppervlakte van enige ruimtefiguren, 15 massa en gewicht, 16 eenvoudige vergelijkingen, 17 stelling van Pythagoras.

W. de Porto

Henri Poincaré, *Wetenschap en hypothese*, Uitg. Boom, Meppel, 254 blz., *f* 34,50, (gebonden *f* 44,50).

Voor ons ligt de Nederlandse vertaling van het bekende werk van Poincaré 'La Science et l'hypothèse' uit 1902, verzorgd door W. A. Verloren van Themaat, met een inleiding van J. J. A. Mooij. Het was een goede gedachte dit werk in het nederlands te vertalen: ondanks het feit dat het jaren geleden voor het eerst verscheen zijn vele van de in dit boek ontwikkelde ideeën nog springlevend en het doordenken alleszins waard.
In 'Het wezen van de wiskundige redenering' gaat Poincaré voornamelijk in op de achtergronden van de bewijsmethode der volledige inductie. Naast de overeenkomst met het fysisch inductief redeneren maakt hij het wezenlijke verschil duidelijk: deductieve stappen naar een algemene regel. De beschouwingen over de verhouding ervaring – wetenschap (ihb wiskunde) zoals die naar voren komen in 'De wiskundige grootheid en de ervaring' zijn nog steeds belangwekkend. De nadruk wordt gelegd op het wiskundig bezig zijn: de ervaring levert de aanleiding tot het vormen van wiskundige concepties, die omgekeerd niet altijd een preciese beschrijving geven van de ruwe ervaringsgegevens. Zo benadert hij in zijn filosofische beschouwing de wijsgerige grond voor het vormen van het begrip continuum. Overwegingen betreffende een in te voeren maat leiden tot het begrip Ruimte.
Allereerst wijdt de schrijver een hoofdstuk aan de niet-euclidische meetkunden, waarbij hij tot de conclusie komt, dat meetkundige axioma's noch synthetische oordelen à priori noch ervaringsfeiten zijn. Hij maakt duidelijk dat we hier veeleer te doen hebben met conventies. Het (ontstaan van) het ruimtebegrip in de meetkunde komt daarna aan de orde. In dat proces speelt de ervaring een beslissende rol, zonder tot gevolg te hebben dat de meetkunde een experimentele wetenschap wordt. Ook hier conventies: de ervaring leidt ons in het keuzeproces welke meetkunde de handigste is.

In 'De ervaring en de meetkunde' wordt dit nog uitgediept. De schrijver toont duidelijk aan dat de ervaring niet kan beslissen tussen Euclides en Lobatsjevsky, dat waarnemingen slechts betrekking hebben op lichamen en niet op de ruimte.
In de volgende hoofdstukken gaat de schrijver in op wijsgerige problemen betreffende de mechanica en de natuurkunde. Ook hier wijst hij duidelijk aan waar en hoe de ervaring een rol speelt en welke conventies wij in onze theorieën betrekken. Duidelijk wordt m.n. in het hoofdstuk over de theoriën van de moderne fysica het kennistheoretische standpunt van de schrijver: de mens kent niets over het wezen van de dingen, hij kan alleen iets bevroeden over de betrekkingen tussen de dingen. Deze betrekkingen, in de vorm van wiskundige wetten vormen de spil van de kennis. Centraal staat de vraag naar eenvoud en eenheid in de natuur. Samenhangend hiermee komt bij de veelheid van verschijnselen het begrip waarschijnlijkheid naar voren. Enige beschouwingen over optica en elektriciteitsleer, elektrodynamica, 'het eind van de materie' besluiten dit boek. Wellicht is uit de bespreking duidelijk geworden dat ik het onderhavige werk van harte wil aanbevelen. Ook onze leerlingen stellen telkens weer vragen naar de wijsgerige, kennistheoretische achtergronden van datgene wat wij vertellen. Uiteraard is er na 1902 veel op dit gebied, ook voor de wiskunde gedaan, vele nieuwe gedachten zijn er ontwikkeld. Toch lijkt mij kennisname van dit werk nog steeds, zeker ook voor wiskundedocenten, alleszins de moeite waard.

W. Kleijne

Peter Linz, *Theoretical numerical analysis - An introduction to advanced techniques*, J. Wiley & Sons, New York, 1979, 228 + XI blz.

In de numerieke wiskunde kan men twee onderdelen onderscheiden, nl. de *methodologie* en de *analyse van numerieke methoden*. De methodologie houdt zich bezig met praktische kwesties, zoals de constructie van concrete algorithmen, hun efficiëncy en toepassing. De analyse betreft het theoretisch onderzoek van numerieke methoden, en leidt bijvoorbeeld tot foutafschattingen en convergentie-stellingen.
Dit boek gaat over het laatst genoemde onderdeel van de numerieke wiskunde.
De schrijver baseert zijn analyse van numerieke methoden op een aantal algemene begrippen en stellingen, die geformuleerd worden in de 'taal' van de functionaalanalyse.
In deel I van dit boek worden de benodigde grondbegrippen uit de functionaalanalyse en approximatietheorie behandeld.
In deel II komen de volgende hoofd-onderwerpen uit de numerieke wiskunde aan de orde: 1. numerieke integratie, 2. de benaderende oplossing van lineaire operatorvergelijkingen, 3. iteratieve methoden voor niet-lineaire vergelijkingen in Banach ruimten.
In deel III bespreekt de schrijver een aantal recente toepassingen van de functionaalanalyse in de numerieke wiskunde. De volgende onderwerpen worden behandeld: 1. lineaire vergelijkingen van de 2e soort, 2. de eindige elementen methode, 3. discretisering van niet-lineaire operatorvergelijkingen, 4. niet goed-gestelde problemen.
Op veel plaatsen in dit boek worden bewijzen van stellingen weggelaten, en wordt volstaan met een duidelijke literatuurverwijzing. De schrijver heeft een heldere betoogtrant en behandelt in kort bestek vrij veel stof. Als eerste inleiding tot de numerieke wiskunde is dit boek niet aan te bevelen; voor de iets gevorderde lezer behandelt het op een aantrekkelijke manier een aantal abstracte noties die binnen de numerieke wiskunde een centrale plaats innemen.

M. N. Spijker

Mededelingen

JAARVERGADERING/STUDIEDAG van de Ned. Ver. van Wisk. Leraren

tijd/plaats	Deze jaarvergadering/studiedag zal gehouden worden op zaterdag 8 november in het gebouw van de S.O.L. Archimedeslaan 16, 3584 BA Utrecht
thema	Voor het studiegedeelte van de dag is de didactiek commissie van de NVWL verantwoordelijk. Zij heeft als thema gekozen: *goniometrie.*
werkwijze	U zult kunnen luisteren naar een *lezing* over goniometrie. Er zal in *werkgroepen* vanuit verschillende invalshoeken met goniometrie gewerkt worden. En er zal bovendien gelegenheid zijn *te praten met collega's* over hun 'vondsten' op het gebied van lesgeven over de goniometrie.
volgende aankondiging	U zult, via Euclides, nog nader geïnformeerd worden over de inhoud van de lezing en de onderwerpen bij de verschillende werkgroepen.

de didactiek commissie van de NVWL
secretariaat: H. Pouw
Jac. v. Ruysdaelstr. 112
Utrecht.

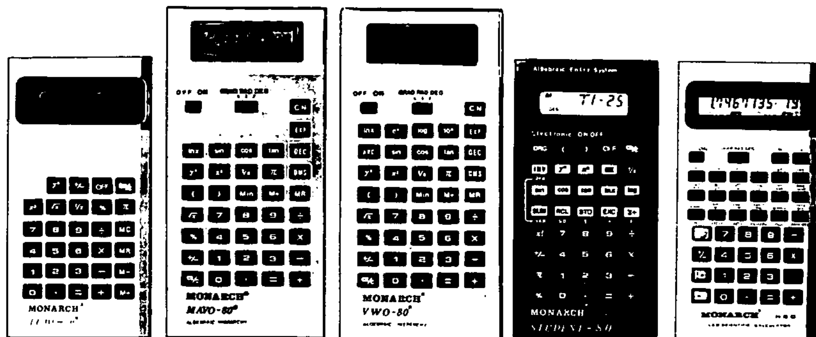
Nascholing eerste graadsdocenten

Het Pedagogisch Didactisch Instituut voor de Leraarsopleiding van de Rijksuniversiteit Utrecht verzorgt voor het cursusjaar 1980-1981 een aantal nascholingscursussen voor docenten in het voortgezet onderwijs. De cursussen die gericht zijn op individuele docenten, zijn in eerste instantie bedoeld voor eerste graads docenten, maar eventueel kunnen ook tweede en derde graads docenten deelnemen. Voor de cursus gericht op secties en scholen geldt uiteraard geen beperking.
Als gevolg van de grote onduidelijkheid met betrekking tot de wettelijke basis van de nascholing is het cursusaanbod dit jaar nog vrij beperkt.
Er zijn cursussen voor docenten:

a moderne vreemde talen (didactiek moderne vreemde talen)
b nederlands (literatuur en verwerking van zakelijke teksten)
c natuurkunde (stralingsbescherming en natuurkundedidactiek en lespraktijk)
d wiskunde
e Verder is er een cursus gericht op scholen die hun beginnende leraren willen gaan begeleiden. De cursus ondersteunt de school bij het opzetten van een begeleidingssysteem en schoolt een aantal ervaren leraren van de school in het begeleiden van beginnende leraren. Voor deze cursus kunnen inlichtingen worden verkregen bij: P.D.I., natuurkunde-didactiek, Princetonplein 1, 3508 PA Utrecht. (tel.: 030-53 11 79).

Naar scholen in de omgeving is een folder met korte cursusbeschrijving verzonden. Belangstellenden kunnen nadere inlichtingen over de cursussen a t/m d verkrijgen bij het P.D.I., Heidelberglaan 2, 3508 TC Utrecht. (tel.: 030-53 17 14).

Doe de lessenaarproef met de nieuwe generatie Monarch handrekenmachines



ware grootte: 136 x 70 x 10mm | 155 x 77 x 11mm | 155 x 77 x 11mm | 136 x 70 x 10mm | 136 x 70 x 10mm

De vele pluspunten van de nieuwe generatie MONARCH handrekenmachines.

- Vijf aangepaste modellen voor de diverse onderwijsniveau's.
- Uitgebreide nederlandstalige gebruiksaanwijzingen met gemiddeld 65 uitgewerkte voorbeelden, geënt op de diverse leerniveau's. Zeer geschikt voor klassikale instruktie van de handrekenmachine.
- Bij de modellen MAVO-80 en VWO-80 wordt gratis het Vademecum-A met ruim 200 onderwerpen (algemeen, wis-, natuur-, scheikunde) bijgeleverd.
(Winkelwaarde f 12,50 ISBN 90 70080 80X. Samengesteld door leraren).
- Gratis transparanten voor de overheadprojektor worden bijgeleverd.
- Met de enkelfunktie modellen LEAO-80, MAVO-80, VWO-80 maakt iedere leerling(e) beslist minder foutieve intoetsingen.
- Door de ruime toetsen worden dubbelaanslagen voorkomen.
- In de toets ingegraveerde symbolen, dus ook na jarenlang intensief gebruik duidelijke afleesbaarheid. (geldt nog niet voor model HBO).
- Nu met onverwoestbare klik-schakelaars, vernieuwde batterijklep, gevoeliger druktoetsen.
- Modellen MAVO-80 en VWO-80 met dubbel beveiligde uitlezing tegen breuk.
Uitermate solide, vergrootte modellen, verzonken in rubber stootranden, dus ekstra goed bestand tegen vallen en harde schokken. doe zelf de lessenaarproef!
- LCD-uitlezing: twee knoopcelbatterijtjes voor een héél jaar rekenen.
- Vlotte garantie gedurende 18 maanden. Zeer snelle garantieservice ± 1 week.

Schoolprijzen reeds vanaf f 39,– inkl. btw, franko afgeleverd aan school.

Vraag uitgebreide dokumentatie en prijzen aan:

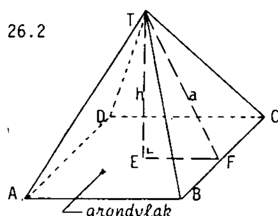
MAKUPORT ELECTRONICS BV

J. Tademaweg 9, 2031 CT Haarlem, tel. 023 - 31 78 50*

Alleen de beste handrekenmachines gaan vergezeld van een geprogrammeerde instruktie

Uit onderzoek is gebleken dat geen enkele handrekenmachine is voorzien van het juiste instruktiemateriaal, afgestemd op de leerstof.
Behalve dan de nieuwe vijf van MONARCH!
Daar doen wij nu een boekje over open.

26.2



Piramide

$V = g \times \frac{1}{3} h$

$A = g$ + omtrek $g \times \frac{1}{2}$ a (pothema)

De apothema is te bereken als hypotenusa van Δ TEF.

V 85 Van een piramide is het grondvlak een vierkant met zijden van 48,0 mm en een hoogte van 90,0 mm.
Bereken het volume en het totale opp.

V = 48 [x^2] x 90 : 3 = 69120 mm³ (69,1 cm³) of: 48 x = x 90 : 3 = 69120 mm³

A = 48 [x^2] + 4 x 48 x 0,5 x (90 [x^2] + 24 [x^2]) [√] = 11246 mm² (112 cm²)

of: 90 x = + 24 x = [√] x 4 x 48 x 0,5 + 48 x = 11246 mm² (112 cm²)

Het Vademecum-A wordt gratis bij iedere MONARCH MAVO-80 en VWO-80 meegeleverd.

Het Vademecum-A, samengesteld door nederlandse leraren, verschaft u meer dan 200 voorbeelden (algemeen, wis-, natuur- en scheikunde). Winkelwaarde *f* 12,50.
U kunt het stap voor stap in de klas doornemen om de HR zo te integreren in de leerstof.
En uw leerlingen kunnen thuis nog eens rustig met hun handrekenmachines oefenen.

Bovendien worden bij alle vijf modellen LEAO-80, MAVO-80, VWO-80, STUDENT-80 en HBO-80 uitgebreide handleidingen verstrekt, waarin de funktie-uitleg óók geënt is op de leerstof.
Gemakkelijk voor klassikale uitleg van de machine. Elk met meer dan 60 voorbeelden.
Alleen zó krijgt de leerling(e) de rekenmachine vlot en optimaal onder de knie!

MONARCH levert goed werk af, tegen de laagste prijs.

MONARCH de enige HR met geprogrammeerde instruktie. Reeds vanaf f 39,– inkl. btw.

Vraag uitgebreide dokumentatie en prijzen aan:

MAKUPORT ELECTRONICS BV

J. Tademaweg 9, 2031 CT Haarlem, tel. (023) 31 78 50*

INHOUD:

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

Ir. G. J. T. A. Bakx, TH Twente, afd. Toegepaste Wiskunde, Postbus 217, 7500 AE Enschede.

O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, 2628 BN Delft.

H. G. Heusinkveld, Diamantstraat 13, 7314 HN Apeldoorn.

S. P. van 't Riet, Schouw 18, 1261 LG Blaricum